Рэймонд М. Смаллиан

ПРИНЦЕССА ИЛИ ТИГР?

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Annotation

Книга известного американского математика и логика профессора Р. Смаллиана, продолжающая серию книг по занимательной математике, посвящена логическим парадоксам и головоломкам, логико-арифметическим задачам и проблемам разрешимости, связанным с теоремой Геделя. Рассчитана на интересующихся занимательной математикой.

Рэймонд М. Смаллиан
ПРИНЦЕССА ИЛИ ТИГР?

От редактора перевода

В 30-х годах этого века психолог Дж. Струп, языковед Э. Бенвенист и логик К. Гёдель примерно в одно время выполнили три исследования, с разных сторон освещающие одно и то же явление. Друг о друге эти ученые едва ли знали. Все три работы впоследствии стали классикой для профессионалов — психологов, лингвистов и математиков соответственно, — но за пределами этих узких кругов стала известной разве что теорема Гёделя (современный немецкий поэт Ганс Магнус Энценсбергер даже посвятил ей стихотворение).

В экспериментах Струпа испытуемому предъявляли слово, написанное цветными чернилами, и просили быстро назвать цвет чернил. Оказалось, что если красными чернилами написано слово СИНИЙ, то время реакции увеличивается. Смысл слова как бы мешает названию цвета, поскольку не совпадает с ним.

Бенвенист изучал свойство некоторых речевых высказываний, которое можно назвать аутореферентностью — ссылкой на себя. Этим свойством обладают те высказывания, при описании смысла которых следует учитывать сами эти высказывания как элемент действительности. Например, в описание смысла фразы «Приказываю открыть парад» должно входить указание на то, что само произнесение этой фразы является сигналом к открытию парада. Почти все военные команды обладают аутореферентностью. Иногда это разделение смысла команды на две части — содержание команды и приказ к ее исполнению — может быть явным. В строевой команде, произносимой «Нале-во!», часть «нале-» указывает направление поворота, а «-во» является сигналом к исполнению; здесь первая часть перестает быть аутореферентной. Важно отметить, что, как и в опыте Струпа, аутореферентное высказывание может быть внутренне конфликтным. В нашем примере, если приказ отдается лицом, не имеющим на это права, то часть интерпретации «это есть приказ к исполнению» оказывается ложной.

Гёдель исследовал программу аксиоматизации математики. Существует ли, например, такая явная система постулатов о свойствах целых чисел (вроде аксиом евклидовой геометрии), из которой чисто логически можно вывести все истинные теоремы о них? (Ложные при этом не должны выводиться.) Объяснить точно содержание этой задачи не очень легко даже математику, который специально логикой не занимался.

Трудность состоит в описании смысла слов «все» и «вывести» — сначала приходится построить целую теорию, формальную систему, внутри которой этими словами можно пользоваться как математическими терминами. Как бы то ни было, Гёдель показал — вопреки некоторым ожиданиям, — что ответ на поставленный вопрос отрицателен, полной системы аксиом арифметики нет. Причина же этого лежит в странных свойствах аутореферентных высказываний, тех же, что и выше. Старинный парадокс лжеца (лжет ли человек, говорящий «я лгу»?) выявляет такую же внутренне конфликтную ситуацию, как слово «синий», написанное красным цветом. Такой конфликт можно имитировать внутри любой достаточно богатой формальной системы, и в рамках этой системы он окажется неразрешимым.

В построении такой имитации и состоит главное техническое достижение Гёделя. Читатель этой книжки, сумевший продумать содержащуюся в ней версию теоремы Гёделя, вероятно, оценит остроумие разных конструкций, которые приходится изобретать. При этом стоит поразмыслить и над тем, почему в опытах Струпа и в парадоксе лжеца внутренне конфликтное аутореферентное высказывание организуется гораздо проще, чем в рассуждении Гёделя. Кажется, ответ связан с тем, что в человеческом сознании «речевая» система, воспринимающая сигнал, отделена от «образной», оценивающей его содержание. В гёделевской же ситуации их приходится реализовывать общими средствами.

Рэймонд М. Смаллиан всю свою профессиональную жизнь занимается вещами, так или иначе связанными с логикой вообще и гёделевой теоремой в частности. В своих математических работах он предложил несколько вариантов формальных систем, в которых идея Гёделя реализуется, по мнению коллег, особенно красиво. В своих же популярных книжках, как эта и предыдущая (Как же называется эта книга? — М.: Мир, 1981), он, подобно каждому писателю, пользуется неведомыми свойствами нашего мозга, чтобы заставить любого терпеливого читателя изумляться, застывать в ожидании, радостно предвкушать и вообще волноваться по поводу вещей, довольно сухих по меркам здравого смысла. Иногда профессор Смаллиан слегка перебарщивает — я не смог заставить себя решать задачки про упырей. Но в лучших головоломках книга заставляет работать речевую и образную системы восприятия так, что они смешно мешают друг другу, вроде ног сороконожки в известной истории.

Логика, оторванная от своего естественного носителя — человеческого мозга, заморожена в микросхемах современных компьютеров. В человеческой голове она живет совершенно иначе, и вечные попытки человечества понять самое себя постоянно возвращают нас к раздумьям, которым посвящена эта книжка. Модели, которые в ней предлагаются, бывают смешны то своей простотой, то эксцентричностью. Смех от души над собственной логикой целителен во многих конфликтах.

Ю. И. Минин

Предисловие

Леди Бланш

Из множества занятных писем, присланных мне после выхода в свет моей первой книги логических головоломок (названия ее я никак не упомню!), одно принадлежало десятилетнему сыну довольно известного математика, с которым я в свое время учился в школе. В письме предлагалась весьма изящная и оригинальная задача, навеянная некоторыми задачками из моей книжки, которую мальчик прочитал взахлеб. Я сразу же позвонил отцу, решив поздравить его с таким умницей. Но тот, прежде чем позвать к телефону самого парнишку, стал заговорщически шептать в трубку: «Ему страшно нравится твоя книга! Но когда будешь с ним толковать, не проговорись, что эта штука называется математикой — в школе он ее просто ненавидит! Чуть заподозрит, что твоя книжка математическая, тут же забросит ее подальше».

Я вспомнил об этой истории потому, что она представляет собой иллюстрацию странного, но распространенного явления. Множество людей, с которыми я сталкивался, утверждали, что ненавидят математику, и в то же время с азартом накидывались на любую логическую или математическую задачу, которую я им подсовывал, стоило лишь облечь ее в форму занимательной головоломки. Я бы ничуть не удивился, если бы хорошие сборники головоломок оказались одним из лучших лекарств против так называемого «страха перед математикой». Более того, любой учебник математики вполне можно переписать в форме набора занимательных задач. Я иногда воображал, что бы произошло, если бы Евклид представил свои классические «Начала» именно в таком виде. Например, вместо того чтобы сформулировать в качестве теоремы утверждение о равенстве углов, лежащих в основании равнобедренного треугольника, а затем строго доказать эту теорему, Евклид начал бы так: «Задача. Дан треугольник с двумя равными сторонами. Всегда ли у него есть два равных угла? Если да, то почему, если нет, то тоже почему? (Решение смотри на странице такой-то.)» А потом и все остальные теоремы постарался бы изложить в таком же духе. Такая книжка вполне могла бы оказаться одним из самых популярных сборников задач в истории!

Вообще-то мои собственные сборники задач отличаются тем, что меня в первую очередь привлекают задачи, связанные с наиболее глубокими и важными результатами логики и математики. Так, истинной целью моей первой книги логических задач было желание дать широкому читателю хотя бы скромное представление о том, в чем же суть великой теоремы Геделя. Книжка, которую вы держите в руках сейчас, — следующий шаг в этом направлении. Многие факты и задачи из нее я использовал в одном из своих курсов лекций, озаглавленном «Головоломки и парадоксы». Тогда-то один из моих студентов заметил мне: «Знаете, профессор, ваша книга — особенно ее третья и четвертая части — читается прямо как какой-то математический роман. Ничего подобного я раньше не встречал!». Мне кажется, что слова «математический роман» в этом случае весьма уместны. Действительно, большая часть книги написана в форме художественного повествования. Поэтому ее вполне можно было бы назвать как-то вроде «Тайна сейфа из Монте-Карло» — ведь в последней части книги речь идет о расследовании, в процессе которого инспектор Крейг из Скотланд-Ярда пытается подобрать комбинацию цифр, позволяющую открыть замок одного из сейфов в Монте-Карло, и тем предотвратить катастрофу. Когда все его усилия вскрыть сейф оказываются безуспешными, инспектор возвращается в Лондон, где по счастливой случайности вновь сталкивается с блестящим и чудаковатым изобретателем цифровых кодирующих машин. Они приглашают еще и специалиста по математической логике, и вскоре все трое погружаются в глубокие воды потока, ведущего в самое сердце великого открытия Гёделя. Конечно же, замок сейфа из Монте-Карло оказывается «гёделевым», а его modus operandi[1] прекрасно иллюстрирует фундаментальную идею Гёделя, влияние и результаты которой обнаруживаются во многих научных теориях, связанных с таким удивительным явлением, как процесс самовоспроизведения.

В конечном счете исследования Крейга и его друзей приводят к весьма примечательным математическим открытиям, не известным до настоящего времени ни ученому миру, ни тем более широкой публике, — это так называемые «законы Крейга» и «законы Фергюссона», которые впервые преданы гласности на страницах книги. Несомненно, они должны заинтересовать как любителей математики, так и логиков, лингвистов и специалистов по вычислительной технике.

Книгу эту я писал с огромным удовольствием; хотелось бы, чтобы с таким же удовольствием ее и читали. Собираюсь написать еще несколько книг в том же духе. Наконец, я хочу поблагодарить моего редактора Энн Клоуз и технического редактора Мелвина Розенталя за ту неоценимую помощь, которую они мне оказали.

Элка-Парк, штат Нью-Йорк

Рэймонд Смаллиан
Февраль 1982 г.

Часть первая. Принцесса или тигр?

1. Задачки с подвохом — старые и новые

Начнем с нескольких арифметических и логических задачек. Одни из них новые, а другие могут оказаться знакомыми читателю.

1. Сколько денег? Предположим, что у вас и у меня имеется одинаковая сумма денег. Сколько денег я должен вам дать, чтобы у вас стало на 10 долларов больше, чем у меня? *(Решения всех задач приведены в конце каждой главы.)*

2. Задача о конгрессменах. В некоем конгрессе заседают сто политических деятелей. Каждый из них либо продажен либо честен. Нам известны следующие два факта:

1) По крайней мере один из конгрессменов является честным.

2) Из каждой произвольно выбранной пары конгрессменов по крайней мере один продажен.

Можно ли с помощью этих двух утверждении определить, сколько конгрессменов в этом конгрессе будут честными, а сколько — продажными?

3. Старое вино в не слишком новые мехи. Бутылка вина стоит 10 долларов. Вино на 9 долларов дороже бутылки. Сколько стоит пустая бутылка?

4. Какова прибыль? Самое удивительное в этой задаче, что разные люди решают ее различными путями, каждый получает свой ответ и каждый с пеной у рта готов доказывать, что именно его ответ правильный.

Торговец купил некий товар за 7 долларов, продал его за 8, потом вновь купил за 9 долларов и опять продал его за 10. Какую прибыль он получил?

5. Задача о десяти любимцах. Самым поучительным в этой задаче является то, что, хотя она легко решается посредством элементарных алгебраических выкладок, ее можно решить вообще без всякой математики — лишь с помощью рассуждений. Более того, решение, подсказанное здравым смыслом, по-моему, гораздо интереснее и уж, конечно, более творческое, а также содержит больше информации, чем сугубо математическое решение.

Итак, десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, каждой кошке — пять. Сколько было собак и сколько кошек?

Любой читатель, хотя бы немного знакомый с алгеброй, легко найдет ответ. Можно решить эту задачу и методом проб и ошибок. Ясно, что для числа кошек в задаче есть 11 возможностей (от 0 до 10).

Перебрав все, легко найти правильный ответ. Однако если подойти к этой задаче толково, то оказывается, что есть еще одно удивительно простое решение, для которого не нужно ни алгебры, ни перебора вариантов. Поэтому я советую тем из вас, кто получит ответ по-своему, заглянуть в решение, приведенное в конце главы.

6. Большие и маленькие птицы. Вот еще одна задача, которая решатся как алгебраически, так и с помощью рассуждений; я и тут предпочитаю здравый смысл. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица вдвое дороже маленькой. Леди, зашедшая в магазин, купила 5 больших птиц и 3 маленьких, Если бы она вместо этого купила 3 больших птицы и 5 маленьких, то потратила бы на 20 долларов меньше. Что стоит каждая птица?

7. Как плохо быть рассеянным. Следующая история произошла на самом деле.

Как хорошо известно, с вероятностью более 50 % можно утверждать, что в группе, состоящей как минимум из 23 человек, всегда найдется по крайней мере двое, у которых день рождения падает на одно и то же число. В свое время я преподавал математику в Принстонском университете и как-то занимался со студентами элементарной теорией вероятностей. Я объяснил своим слушателям, что если число людей в группе увеличить с 23 до 30, то вероятность того, что в ней окажутся по крайней мере двое, которые родились в один и тот же день, окажется близка к единице.

— Но, — продолжал я — поскольку вас здесь всего 19, то вероятность того, что у двоих из вас дни рождения совпадают, будет гораздо меньше 50 %.

Тут один из студентов поднял руку:

— Бьюсь об заклад, профессор, что по крайней мере у двоих из присутствующих здесь дни рождения должны совпасть.

— С моей стороны было бы не очень честно принимать ваше пари, — ответил я. — Ведь теория вероятностей целиком на моей стороне.

— Это не имеет значения, — упорствовал студент. — Я все-таки готов с вами поспорить!

— Ну, ладно, — согласился я, надеясь преподать юному скептику достойный урок. Затем я стал по очереди опрашивать студентов, с тем, чтобы каждый назвал дату своего рождения. Не успели мы выслушать и половину присутствующих, как вдруг вся аудитория, в том числе и я, покатились со смеху по поводу моей бестолковости.

Юноша, который так самоуверенно вступил со мной в спор, не знал даты рождения никого из присутствующих, за исключением, конечно, самого себя. Не догадаетесь ли вы, почему он был так уверен в своей правоте?

8. Республиканцы и демократы. В одной фирме каждый служащий является либо республиканцем, либо демократом. Как-то раз один из демократов решил перейти в республиканцы, и после того, как это произошло, в фирме оказалось ровно столько же республиканцев, сколько и демократов. Спустя несколько недель новоиспеченный республиканец решил вновь стать демократом, так что все вернулось в исходное состояние.

Потом еще один республиканец также решил перейти в демократы — при этом демократов сразу стало вдвое больше, чем республиканцев. Сколько служащих в фирме?

9. Еще один вариант задачи о «разноцветных шляпах».

Три человека — А, В и С — обладают абсолютными логическими способностями. Любой из них может из произвольного набора предпосылок мгновенно вывести все возможные следствия. Кроме того, каждый из них знает, что двое других мыслят абсолютно логично.

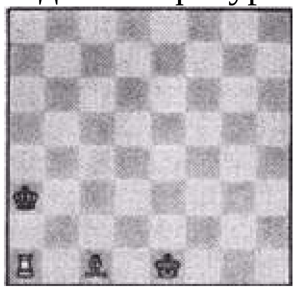
Этой троице показали 7 марок: 2 красных, 2 желтых и 3 зеленых. Затем всем троим завязали глаза и каждому наклеили на лоб по марке, а оставшиеся 4 марки спрятали в коробку. Когда у них сняли с глаз повязки, у А спросили:

«Можете ли вы назвать хотя бы один цвет, которого на вас определенно нет?» На что А ответил: «Нет». Когда тот же самый вопрос задали В, он также ответил: «Нет».

Можно ли с помощью имеющейся информации установить, какого цвета марки у А, В и С?

10. Задача для тех, кто умеет играть в шахматы. Мне хотелось бы обратить ваше внимание на интересный класс головоломок с шахматами, которые в отличие от обычных шахматных задач типа «белые начинают и дают мат в столько-то ходов» заставляют нас обращаться к предыстории позиции, то есть исследовать, как она возникла на доске.

Однажды инспектор Крейг из Скотланд-Ярда[2], который интересовался такими задачами не меньше, чем Шерлок Холмс[3], вместе с другом заглянул в шахматный клуб, где их внимание привлекла оставленная кем-то шахматная доска с фигурами.



— Те, кто разыгрывал эту партию, — заметил приятель Крейга, — судя по всему, совершенно не знакомы с правилами игры. Подобная позиция просто невозможна!

— Почему? — поинтересовался Крейг.

— Потому что черные находятся под шахом одно временно от белой ладьи и от белого слона. Как могли белые объявить такой шах? Если бы они просто сделали ход ладьей, черный король уже находился бы под шахом от слона, а если бы они сходили слоном, то король еще перед этим должен был быть под шахом от ладьи. Поэтому такая позиция абсолютно нереальна!

Некоторое время Крейг внимательно изучал расположение фигур.

— Я думаю, — произнес он наконец, — это не так. Конечно, позиция весьма экстравагантна, но все же она вполне согласуется с правилами шахматной игры.

Тут Крейг оказался абсолютно прав! Данная позиция, хотя и выглядит на первый взгляд совершенно абсурдной, на самом деле вполне возможна, и мы можем даже указать последний ход белых. Что это был за ход?

Решения

1. Распространенный неправильный ответ — 10 долларов. Допустим теперь, что у каждого из нас, скажем, по 50 долларов. Если я дам вам 10 долларов, то у вас окажется 60 долларов, а у меня только 40. Следовательно, у вас будет на 20 долларов больше, чем у меня, а вовсе не на 10.

Итак, правильный ответ: 5 долларов.

2. Довольно распространенный ответ — 50 честных и 50 продажных. Другой сравнительно часто встречающийся ответ — 51 честный и 49 продажных. Оба этих ответа неправильны! Рассмотрим, какое же решение будет правильным.

Нам дано, что по меньшей мере один из конгрессменов должен быть честным. Возьмем любого честного конгрессмена, пусть его зовут Фрэнком. Выберем теперь любого из оставшихся 99 и назовем его Джоном. Согласно второму из условий задачи, по крайней мере один конгрессмен из пары Фрэнк — Джон является продажным. Так как Фрэнк не может быть продажным, то, следовательно, таковым должен быть Джон. Поскольку Джон условно представляет любого из оставшихся 99 конгрессменов, то, значит, каждый из этих 99 должен быть продажным. Таким образом, правильный ответ — 1 честный и 99 продажных.

Другой способ доказать это таков. В утверждении, что из любых двух конгрессменов хоть один продажен, сказано в точности то, что и в утверждении, что любые два конгрессмена не могут одновременно быть честными, иными словами, что сразу двух честных конгрессменов тут не найти. Значит, в этом конгрессе самое большее один конгрессмен честен. Но, согласно первому условию, уж один-то честный конгрессмен есть. Стало быть, ровно один честен. А на ваш взгляд, какое из двух доказательств лучшее?

3. Обычный неправильный ответ — 1 доллар. Так вот, если бы бутылка в самом деле стоила один доллар, тогда ее содержимое, будучи на 9 долларов дороже, стоило бы 10 долларов. Значит, вино вместе с бутылкой стоило бы 11 долларов.

Правильный ответ — бутылка стоит полдоллара, а вино — 9½ доллара. Общая их стоимость составляет 10.

4. Некоторые рассуждают так: купив некую вещь за 7 долларов и продав ее за 8, человек получает 1 доллар прибыли. Далее, вновь купив эту вещь за 9 долларов, после того как он уже продал ее за 8 долларов, покупатель теряет 1 доллар. Стало быть, к этому моменту он ничего не потерял и не приобрел. Но тогда (продолжая рассуждение аналогичным образом), продав за 10 долларов вещь, которую он перед этим купил за 9 долларов, торговец вновь зарабатывает доллар. Следовательно, общая его прибыль составит 1 доллар.

Другой ход рассуждений приводит нас к выводу, что торговец ничего не выгадает и не потеряет. В самом деле, если он продал данную вещь за 8 долларов, купив ее перед этим за 7 долларов, то значит, человек сумел заработать 1 доллар. Но тогда он теряет 2 доллара, вновь покупая за 9 долларов ту вещь, за которую он первоначально заплатил 7 долларов, так что к этому моменту у него образуется дефицит в 1 доллар. В конце концов он получит свой доллар обратно, продав за 10 долларов вещь, которую перед этим купил за 9 долларов. Тем самым он остается, так сказать, при своих.

Оба рассуждения неверны. Правильный ответ — торговец заработает 2 доллара. Имеется несколько способов получения этого ответа. Один из них следующий. Во-первых, очевидно, что, продав за 8 долларов вещь, которую перед этим купил за 7 долларов, торговец заработал 1 доллар. Предположим теперь, что вместо того, чтобы вновь покупать ту же самую вещь за 9 долларов и потом продавать ее за 10 долларов, торговец покупает другую вещь за 9 долларов и продает ее за 10 долларов. В самом деле, будет ли такая сделка хоть как-нибудь отличаться от предыдущей с чисто экономической точки зрения? Конечно же, нет! Поэтому очевидно, что, купив и опять продав эту другую вещь, торговец заработает еще 1 доллар. Следовательно, общая его прибыль составит 2 доллара.

Еще одно крайне простое доказательство таково: общая сумма расходов нашего торговца составляет 7 + 9 = 16 долларов, а его полный доход равен 8 + 10 = 18 долларам, что и составляет 2 доллара прибыли.

Для тех читателей, которых не убедили приведенные рассуждения, предположим, что у нашего торговца с утра имеется в бумажнике определенная сумма денег, скажем 100 долларов, и что в течение дня он совершит только 4 описанные сделки. Сколько денег окажется у него к концу дня? Пусть, например, он сначала заплатит за свою покупку 7 долларов; тогда у него в кармане останется 93 доллара. Когда же он продаст свое приобретение за 8 долларов, у него будет уже 101 доллар. Далее он вновь покупает эту же вещь за 9 долларов, то есть снова тратит 9 долларов на покупку, в результате чего у него остается 92 доллара. Наконец, продает злополучную вещь за 10 долларов, и, следовательно, у него оказывается 102 доллара. Итак, начал день с сотней долларов, а к вечеру имел 102 доллара. Так сколько же он приобрел за день? Ну, конечно же, 2 доллара!

5. Решение, которое я имею в виду, таково. Сперва скормим каждому из десяти животных по 5 галет. У нас останется 6 галет. Но теперь все кошки получили причитающуюся им долю! Значит, 6 оставшихся галет предназначаются собакам. А поскольку каждому псу должно достаться еще по одной галете, то, следовательно, собак — 6, а кошек — 4.

Конечно, это решение легко проверить. В самом деле, если 6 собак слопают по шесть галет, на это пойдет 36 галет. Четыре кошки, каждая из которых довольствуется 5 галетами, съедят 20 галет. В сумме это составит 56 галет, как и должно быть.

6. Поскольку цена одной большой птицы равна цене двух маленьких, то 5 больших птиц будут стоить столько же, сколько 10 маленьких. Значит, 5 больших птиц плюс 3 маленьких будут стоить столько же, сколько 13 маленьких. С другой стороны, цена 3 больших и 5 маленьких птиц равняется цене 11 маленьких птиц. Таким образом, разница между ценой 5 больших и 3 маленьких птиц оказывается равной разнице между ценой 13 и 11 маленьких птиц, то есть равна цене 2 маленьких птиц. Поскольку 2 маленькие птицы стоят 20 долларов, то цена одной маленькой птицы равняется 10 долларам.

Проверим наше решение. Маленькая птица стоит 10 долларов, большая — 20 долларов. Следовательно, счет на оплату 5 больших и 3 маленьких птиц составит 130 долларов. Если бы леди купила 3 больших и 5 маленьких птиц, она потратила бы 110 долларов, то есть действительно на 20 долларов меньше.

7. В тот момент, когда я заключил пари с этим студентом, у меня абсолютно вылетело из головы, что двое других моих студентов, всегда сидевших в аудитории рядышком, — близнецы.

8. В фирме было 12 служащих: 7 демократов и 5 республиканцев.

9. Единственным человеком, который может определить цвет своей марки, является С. Если бы марка С была красной, тогда В сразу сообразил бы, что его марка не может быть красной, рассуждая так: «Если бы моя марка тоже оказалась красной, тогда А, увидев перед собой две красные марки, сразу понял бы, что его марка не красная. Но А не знает, что его марка не красная. Следовательно, моя также не может быть красной». Это рассуждение доказывает, что если бы марка С была красной, то В знал бы, что его марка — не красная. Но В не знает, что его марка не красная, и, следовательно. марка С не может быть красной. То же самое рассуждение, в котором слово «красная» мы заменим на «желтая» показывает, что марка

С не может быть также и желтой. Таким образом, на лбу у С марка зеленого цвета.

10. В условии задачи не оговорено, какая сторона доски соответствует белым фигурам, а какая — черным. Читателю может показаться, что белые ходят снизу вверх, но тогда эта позиция действительно не могла бы возникнуть! На самом же деле белые фигуры перемещаются сверху вниз и перед последним ходом позиция на доске была такой, как показано на рисунке.

Жирная черная точка в левом нижнем углу доски означает произвольную фигуру черных (из условия не узнаешь, какую — ферзя, ладью, слона или коня).

Далее белая пешка бьет черную фигуру и превращается в ладью, после чего на доске возникает приведенная в условии задачи позиция.

Конечно, читатель вполне мог бы задаться вопросом «А почему белая пешка превращается в ладью, а не в ферзя — не слишком ли это маловероятно?» Ответ заключается в том, что этот ход действительно маловероятен, но ведь любой другой ход в этом случае просто невозможен, а как однажды Шерлок Холмс проницательно заметил доктору Ватсону: «Когда мы отбрасываем невозможное — то, что остается, каким бы маловероятным оно нам ни представлялось, обязательно должно оказаться правдой».

2. Принцесса или тигр?

У Фрэнка Стоктона есть сказка, которая называется «Принцесса или тигр?» В этой сказке один узник должен угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой — тигр. Если он укажет на первую комнату, то женится на принцессе, если на вторую, то его (вполне возможно) растерзает тигр.

В некотором царстве правил король. Однажды он тоже прочитал эту сказку.

— В самый раз для моих заключенных! — сказал он своему министру. — Только я не хочу полагаться на случайности. Пусть на дверях каждой комнаты повесят по табличке, а заключенному будет кое-что сказано о них. Если узник не дурак и способен рассуждать логически, он сумеет сохранить себе жизнь и в придачу заполучить прелестную невесту.

— Блестящая идея, ваше величество! — согласился министр.

Испытания первого дня

В самый первый день были проведены три испытания. При этом король объявил узнику, что в ходе всех трех испытаний в каждой из комнат будет находиться либо принцесса, либо тигр, хотя вполне может статься, что сразу в обеих комнатах обнаружится по тигру или там окажутся одни лишь принцессы.

1. Первое испытание.

— А что, если в обеих комнатах сидят тигры? — спросил узник. — Что же мне тогда-то делать?

— Считай, не повезло, — ответил король.

— А если в обеих комнатах окажется по красавице? — поинтересовался узник.

— Считай, подфартило, — сказал король. — Уж это ты и сам бы мог сообразить!

— Ну, хорошо, а если в одной комнате принцесса, а в другую посадили тигра, что тогда? — не успокаивался узник.

— Вот тут-то уже все зависит от тебя! Не так ли?

— Да откуда же мне знать, где кто? — сокрушенно вздохнул узник.

Тут король указал на таблички, прикрепленные к дверям каждой из комнат. На них было написано:

I В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр

II В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр

— На одной — правда, — отвечал король, — на другой — нет.

А вы на месте узника, какую бы дверь открыли? (Конечно, если вы предпочитаете принцессу тигру.)

2. Второе испытание.

Итак, первый узник спас себе жизнь и на радостях отбыл вместе с принцессой.

Таблички на дверях сменили, соответственно были подобраны и обитатели комнат. На этот раз на табличках можно было прочитать следующее:

I По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса

II Тигр сидит в другой комнате

— Истинны ли утверждения на табличках? — спросил второй узник.

— Может, оба истинны, а может, оба ложны, — ответил ему король.

Какую из комнат следует выбрать второму узнику?

3. Третье испытание.

Во время этого испытания король объявил, что опять утверждения на обеих табличках одновременно либо истинны, либо ложны. Надписи же были вот какие:

I Либо в этой комнате сидит тигр, либо принцесса находится в другой комнате

II Принцесса в другой комнате

Кто же обнаружится в первой комнате — принцесса или тигр? А во второй?

День второй

— Вчера мы сваляли дурака, — сказал король своему министру. — Все трое выкрутились! Ладно, сегодня у нас еще пятеро, и я придумаю для них кое-что похлеще.

— Блестящая идея, ваше величество! — поддержал министр.

И во всех испытаниях этого дня относительно левой комнаты (комната I) король говорил вот что:

— Если в этой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, ложно.

В правой же комнате (комната II) все было наоборот: утверждение на табличке ложно, если в комнате находится принцесса, и истинно, если в комнате сидит тигр. Ну и опять же, вполне может статься, что в обеих комнатах находятся принцессы или в них сидит по тигру, либо, наконец, в одной комнате пребывает принцесса, а в другой — тигр.

4. Четвертое испытание.

Объявив эти правила следующему узнику, король указал на две новые таблички:

I В обеих комнатах находятся принцессы

II В обеих комнатах находятся принцессы

Какую из комнат следует выбрать на этот узнику?

5. Испытание пятое.

Условия те же, а таблички вот какие:

I По крайней мере в одной из комнат находится принцесса

II Принцесса — в другой комнате

6. Испытание шестое.

Этой задачкой король особенно гордился, равно как и следующей за ней.

I Что ни выберешь — все едино

II Принцесса — в другой комнате

Как должен поступить узник?

7. Испытание седьмое.

Теперь на табличках было написано:

I Что выбрать — большая разница

II Лучше выбрать другую комнату

8. Испытание восьмое.

— На дверях же нет никаких табличек! — воскликнул следующий узник.

— Совершенно верно, — заметил король. — Их только что изготовили и не успели повесить.

— Так как же мне выбирать? — спросил узник.

— А вот эти таблички, — ответил король.

В этой комнате сидит тигр

В обеих комнатах сидят тигры

— Очень мило, — обеспокоился узник, — а какую куда?

Король призадумался.

— А тебе это знать вовсе не обязательно, — сказал он наконец. — Задача решается и так. Только не забудь, конечно, — добавил он, — что если принцесса в левой комнате, то утверждение на табличке у этой двери будет истинным, а если там тигр, то ложным. Для правой же комнаты — все наоборот.

Каково решение задачи в этом случае?

Третий день

— Проклятье! — воскликнул король. — Опять все наши узники ускользнули. Я думаю, завтра надо занять три комнаты вместо двух. В одну поместим принцессу, а в две другие — по тигру. Поглядим, каково придется нашим умникам!

— Блестящая идея, ваше величество! — сказал министр.

— Ваши оценки, мой друг, крайне лестны для меня, хотя и несколько однообразны, — поморщился король.

— Блестяще сказано, ваше величество! — воскликнул министр.

9. Испытание девятое.

Итак, на третий день король сделал все так, как задумал. Узнику были предложены на выбор три комнаты, в одной из которых, как объяснил король, находилась принцесса, а в двух других сидели тигры.

На дверях комнат были повешены следующие таблички:

I В этой комнате сидит тигр

II В этой комнате находится принцесса

III Тигр сидит в комнате II

При этом король добавил, что по крайней мере одно из этих утверждений является истинным. Где принцесса?

10. Испытание десятое.

И снова в комнаты поместили лишь одну принцессу и двух тигров. Король объяснил узнику, что на этот раз табличка на двери, за которой находится принцесса, говорит правду, а из двух других надписей по меньшей мере одна является ошибочной.

Сами же таблички имели такой вид:

I Тигр сидит в комнате II

II Тигр сидит в этой комнате

III Тигр сидит в комнате I

Что делать узнику?

11. Три возможности.

Это испытание было еще каверзнее. Король объяснил узнику, что в одной из комнат сидит принцесса, в другой — тигр, а третья комната пуста. При этом надпись на двери комнаты, в которой находится принцесса, — истинна, надпись на двери, за которой сидит тигр, — ложна, а то, что написано на табличке у пустой комнаты, может оказаться как истинным, так и ложным. Вот эти таблички:

I Комната III пуста

II Тигр сидит в комнате I

III Эта комната пуста

А узник раньше видел эту самую принцессу и совсем не прочь был жениться на ней. Поэтому, хотя пустая комната, конечно, получше комнаты с тигром, узнику все же хотелось угадать, где принцесса.

Так где же принцесса, а где тигр? Если вы сумеете ответить на эти вопросы, то без труда поймете, какая комната пуста.

Четвертый день

— Ужас! — рассердился король. — Никого не удалось подловить, видно, задачки чересчур легкие. Ладно, остался еще один узник, вот я и задам ему жару!

12. Логический лабиринт.

Ну, король был человеком слова. Теперь узнику приходилось выбирать уже не из трех комнат, а из целых девяти! При этом, как объяснил король, только в одной из них находилась принцесса; в каждой же из остальных восьми комнат либо сидел тигр, либо вообще никого не было. К тому же, добавил король, утверждение на табличке у комнаты, где находится принцесса, истинно, таблички на дверях комнат с тиграми содержат ложные сведения, а на дверях пустых комнат может быть написано что угодно.

Вот эти таблички:

I Принцесса находится в комнате с нечетным номером

II Эта комната пуста

III Либо утверждение V истинно, либо утверждение VII ложно

IV Утверждение I ложно

V Утверждение II или утверждение IV истинно

VI Утверждение III, ложно

VII В комнате I принцессы нет

VIII В этой комнате сидит тигр, комната IX пуста

IX В этой комнате сидит тигр, и утверждение VI ложно

Узник задумался.

— Но ведь задача неразрешима! — вдруг сердит воскликнул он. — Это нечестно!

— А я это прекрасно знаю, — засмеялся король.

— Очень смешно! — возмутился узник. — Тогда скажите мне по чести хоть одно: пуста комната VIII или же ней кто-то есть?

У короля достало совести ответить, пуста ли комната VIII. Из этого узник сумел догадаться, где находите принцесса.

Так где же находилась принцесса?

Решения

1. Нам известно, что надпись на одной из табличек истинна, а на другой ложна. Возможно ли, чтобы утверждение, написанное на первой табличке, было истинным, а на второй — ложным? Конечно же, нет! Поскольку если первая табличка говорит нам правду, то тогда надпись на второй табличке также должна быть неверной, то есть если принцесса находится в I, а тигр сидит в комнате II, то это заведомо означает что в одной из комнат находится принцесса, а в другой тигр. Но поскольку не может оказаться так, чтобы первое утверждение было истинным, а второе ложным, то ясно, что истинной должна быть вторая надпись, а ложной — первая. Далее, поскольку второе утверждение является истинным, то это означает, что в одной из комнат действительно находится принцесса, а в другой сидит тигр. Теперь, поскольку первая надпись лжет, значит, тигр должен сидеть в комнате I, а принцесса в комнате II. Следовательно, узник должен выбрать вторую комнату.

2. Если надпись II ложна, то принцесса находится в комнате I. Значит, принцесса присутствует хоть в одной из комнат, так что утверждение на табличке I истинно. Поэтому невозможно, чтобы сразу две надписи оказались ложными. Это означает, что оба приведенных утверждения истинны (ведь, согласно условию, они одновременно либо оба истинны, либо оба ложны). Таким образом, тигр сидит в комнате I, а принцесса в комнате II; значит, узнику опять следует выбрать вторую комнату.

3. В тот раз король, по всей видимости, пребывал в благодушном настроении, поскольку в обеих комнатах оказалось по принцессе. Убедимся в этом следующим образом.

Надпись на табличке I означает, что хотя бы одно из двух утверждений верно: в комнате I сидит тигр; в II находится принцесса. (При этом не исключены, что обе возможности осуществляются одновременно.)

Далее, если утверждение на табличке II ложно, то, значит, тигр сидит в комнате I, а тогда первая табличка говорит правду (поскольку выполняется первое из приведенных на ней утверждений). Однако из условий задачи мы знаем, что не может случиться так, чтобы надпись на одной из табличек оказалась истинной, а на другой ложной. Следовательно, поскольку утверждение II истинно, то надписи на обеих табличках одновременно должны быть истинными. Теперь, поскольку на табличке II истинное утверждение, то в комнате 1 находится принцесса. Это означает также, что первый из вариантов на табличке I невозможен, но поскольку, по меньшей мере, один из этих вариантов обязательно выполняется, то это должен быть именно второй вариант. Таким образом, в комнате II также находится, принцесса.

4. Поскольку обе таблички утверждают одно и то же, значит, они одновременно либо говорят правду, либо лгут. Допустим, что обе надписи утверждают правду — тогда в обеих комнатах должны находиться принцессы. В частности, это будет означать, что и в комнате 2 принцесса. Но нам сообщили, что если в комнате 2 находится принцесса, то утверждение на соответствующей табличке должно быть ложным. В результате мы приходим к противоречию, и, следовательно, надписи на обеих табличках не могут являться истинными; они будут ложными. Итак, мы получаем, что в комнате 1 сидит тигр, а в комнате II находится принцесса.

5. Если предположить, что в первой комнате сидит тигр, то мы приходим к противоречию. Действительно, в этом случае утверждение на первой табличке оказывается ложным, что сразу приводит нас к выводу, что ни в одной из комнат нет принцессы, то есть что в обеих комнатах должно сидеть по тигру. В то же время из условия задачи мы знаем — наличие тигра во второй комнате означает, что вторая надпись является верной, то есть в другой комнате должна находиться принцесса. Это противоречит исходному предположению о том, что в первой комнате сидит тигр. Значит, тигр в первой комнате оказаться не может, и, следовательно, там должна находиться принцесса. Таким образом, вторая табличка не лжет — во второй комнате действительно обретается тигр. Итак, принцесса находится в первой комнате, а тигр сидит во второй.

6. Первая надпись утверждает, что в обеих комнатах либо находятся принцессы, либо сидят тигры — ведь только в такой ситуации все равно, какую из комнат выбрать. Пусть, например, принцесса находится в первой комнате. Тогда фраза, приведенная на первой табличке, истинна, отсюда следует, что во второй комнате также находится принцесса. С другой стороны, предположим, что в первой комнате сидит тигр. Тогда первая надпись будет ложной и, значит, в обеих комнатах должны находиться различные обитатели, откуда опять следует, что во второй комнате должна оказаться принцесса. Тем самым доказано, что принцесса должна находиться в комнате II независимо от того, кто занимает комнату 1. Наконец, поскольку принцесса находится в комнате 2, то надпись II является ложной и, следовательно, в комнате I должен сидеть тигр.

7. Первая табличка фактически утверждает, что в обеих комнатах находятся разные обитатели (в одной — принцесса, в другой — тигр), но ничего не говорит нам о том, кто же именно в какой комнате. Если комнату I занимает принцесса, то утверждение таблички I истинно; следовательно, в комнате II должен сидеть тигр. С другой стороны, если в комнате I посажен тигр, то первая надпись оказывается ложной, откуда следует, что на самом деле обитатели обеих комнат должны быть одинаковы, и поэтому в комнате 2 также должен находиться тигр. Итак, в комнате II действительно сидит тигр. Это значит, что вторая надпись является истинной и, следовательно, принцесса должна находиться в первой комнате.

8. Предположим, что верхняя табличка «В этой комнате сидит тигр» прикреплена у дверей комнаты I. Если принцесса находится в этой комнате, то утверждение на табличке будет ложным — однако при этом нарушаются объявленные королем условия. Если же в левой комнате сидит тигр, то надпись на табличке будет истинной — условия, объявленные королем, оказываются нарушенными вновь. Поэтому ясно, что верхняя табличка не может висеть на дверях комнаты I. Значит, она должна находиться на дверях комнаты II; в свою очередь нижняя табличка должна располагаться на первой двери.

Итак, табличка, которая должна висеть на первой двери, гласит: «В обеих комнатах сидят тигры». При этом принцесса не может находиться в комнате I; ведь в противном случае левая табличка оказывается правдивой, что приводит нас к очевидному противоречию, будто бы в обеих комнатах сидят тигры. Следовательно, в комнате I сидит тигр. Отсюда сразу становится ясно, что табличка на дверях этой комнаты ложна, и поэтому в комнате II должна находиться принцесса

9. Утверждения на табличках II и III противоречат друг другу, поэтому по меньшей мере одно из них должно оказаться истинным. Поскольку по условию самое большее одна из трех табличек говорит нам правду, то первая надпись должна быть ложной, и, следовательно, принцесса находится в комнате I.

10. Поскольку табличка на дверях комнаты, где находится принцесса, говорит нам правду, то, значит, принцесса никак не может оказаться в комнате II. Если бы она находилась в комнате III, то все три исходные утверждения были бы истинными, что противоречило бы условиям задачи, согласно которым, по крайней мере, одно из трех приведенных утверждений должно быть ложным. Следовательно, принцесса находится в комнате I. (При этом табличка II утверждает правду, а табличка III лжет.)

11. Поскольку табличка на дверях комнаты, где находится принцесса, говорит нам правду, то, естественно, что принцесса не может оказаться в комнате III.

Допустим теперь, что принцесса находится в комнате II. Тогда надпись на табличке II будет истинной, и следовательно, тигр должен сидеть в комнате I, а комната III окажется пустой. Это также будет означать, что истинной является и надпись на дверях комнаты, где сидит тигр, что невозможно. Значит, принцесса должна находиться в комнате I; при этом в комнате III никого нет, а в комнате II сидит тигр.

12. Если бы король сообщил узнику, что комната VIII пуста, то у последнего не было бы никаких шансов обнаружить принцессу. Но так как узник все же сумел догадаться, где находится принцесса, то, стало быть, король сказал ему, что в комнате VIII кто-то есть.

Это позволило узнику рассуждать следующим образом.

Принцесса не может находиться в комнате VIII, поскольку если бы это было так, то надпись на табличке VIII оказалась бы верной, — сама же эта надпись утверждает, что в комнате сидит тигр; значит, это сразу приводит нас к противоречию. Таким образом, принцессы в комнате VIII нет, но так как в ней все же кто-то есть (ведь она не пуста) — следовательно, в комнате VIII должен сидеть тигр. Поскольку там находится тигр, табличка на дверях этой комнаты лжет. Наконец, если пуста комната IX, то надпись на табличке VIII должна быть верной — значит, комната IX не может быть пустой.

Итак, в комнате IX также кто-то есть. Это не может быть принцесса, поскольку тогда табличка на дверях комнаты оказалась бы верной — отсюда сразу следовало бы, что в комнате сидит тигр. Значит, на табличке IX записано ложное утверждение. Далее, если бы неверной оказалась табличка VI, то табличка IX утверждала бы правду. На самом деле это не так, и, следовательно, то, что написано на табличке VI, — истинно.

Далее, поскольку табличка VI верна, это означает, что на табличке III написана ложь. Единственная возможность, чтобы фраза на табличке III оказалась ложной, соответствует случаю, когда табличка V ложна, а табличка VII истинна. Поскольку табличка V ложна, то ложными будут также утверждения на табличках II и IV. Кроме того, поскольку табличка V является ложной, табличка I должна быть истинной. Теперь известно, на каких табличках написана, правда, а на каких ложь, а именно:

I — правда
II — ложь
III — ложь
IV — ложь
V — ложь
VI — правда
VII — правда
VIII — ложь

IX — ложь

Ясно, что принцесса может находиться только в комнатах I VI и VII, поскольку таблички на дверях […] Так как табличка I утверждает правду, то принцесса не может оказаться в комнате VI, наконец, поскольку истинна табличка VII, принцесса не может находиться и в комнате I. Следовательно, принцесса — в комнате VII.

3. Лечебница доктора Смолля и профессора Перро

Однажды инспектора Крейга из Скотланд-Ярда срочно откомандировали во Францию для проверки одиннадцати лечебниц для умалишенных, где, по слухам, дела обстояли не слишком-то хорошо. В каждой из лечебниц единственными обитателями были пациенты и врачи — причем последние составляли весь персонал этих медицинских учреждений. Каждый обитатель лечебницы, будь то пациент или доктор, либо находился в здравом уме, либо был лишен рассудка. Кроме того, нормальные обитатели были абсолютно нормальны и на сто процентов уверены в том, что они говорят, они твердо знали, что все истинные утверждения действительно являются истинными, а все ложные — на самом деле ложными. В то же время безумные обитатели лечебниц придерживались совершенно противоположных представлений: все истинные утверждения они считали ложными, а все ложные утверждения — истинными. Наконец, надо полагать, что все обитатели лечебниц во всех случаях остаются честными — они всегда верят в то, что говорят.

1. Первая лечебница.

В первой же лечебнице, которую посетил Крейг, он беседовал по очереди с двумя обитателями, которых звали Джонс и Смит.

— Не могли бы вы рассказать мне, — обратился инспектор к Джонсу, — что вам известно о мистере Смите?

— Вам следовало бы называть его доктор Смит, — поправил Джонс. — Ведь это один из врачей нашей больницы.

Позже Крейг задал Смиту вопрос:

— Что вам известно о Джонсе? Он здесь пациент или доктор?

— Он пациент, — ответил Смит.

Поразмыслив некоторое время, инспектор смекнул, что дела в этой лечебнице и в самом деле идут не блестяще: либо один из докторов лишился рассудка и, значит, ему не следует продолжать работу в больнице умалишенных, либо, что еще хуже, один из пациентов является нормальным человеком и вообще не должен находиться здесь.

Как Крейг догадался об этом?

2. Во второй лечебнице.

В другой лечебнице, которую посетил Крейг, один из ее обитателей сообщил инспектору нечто такое, из чего тот смог сделать вывод, что говоривший был пациентом, но во вполне здравом уме, и потому его нужно было выпустить оттуда. Инспектор сразу же предпринял шаги для его освобождения. Не могли бы вы предложить пример такого сообщения?

3. В третьей лечебнице.

В следующей лечебнице некий обитатель высказал утверждение, из которого Крейг смог сделать вывод, что тот является лишившимся рассудка доктором.

Не могли бы вы сформулировать такое утверждение?

4. В четвертой лечебнице.

В следующей лечебнице Крейг спросил одного из ее обитателей:

— Вы пациент?

На что тот ответил:

— Да.

Как обстоят дела в этой лечебнице?

5. В пятой лечебнице.

В следующей лечебнице Крейг спросил одного из обитателей:

— Вы пациент?

Тот ответил:

— Думаю, что да.

Все ли обстоит хорошо в этой больнице?

6. В шестой лечебнице.

В следующей лечебнице, куда наведался Крейг, он спросил одного из обитателей:

— Считаете ли вы себя пациентом?

Помедлив, тот ответил:

— Думаю, что считаю.

Все ли в порядке в этой лечебнице?

7. В седьмой лечебнице.

Еще более заинтересовало Крейга положение дел в следующей лечебнице. Повстречав двух ее обитателей, назовем их А и В, инспектор выяснил следующее: А думает, что В не в своем уме, а В считает, что А — доктор. Инспектор принял меры, чтобы удалить одного из них из больницы. Кого и почему?

8. В восьмой лечебнице.

Обстановка в следующей лечебнице оказалась совсем запуганной, но в конечном счете Крейг и тут сумел докопаться до сути. По ходу дела он обнаружил следующие обстоятельства:

1. Для любых двух обитателей больницы A и B выполняется условие: A либо доверяет, либо не доверяет B.

2. Некоторые из обитателей больницы являются наставниками для других. Каждый обитатель имеет по крайней мере одного наставника.

3. Ни один обитатель A не желает быть наставником обитателя B, если A не считает, что B доверяет самому себе.

4. Для любого обитателя A всегда найдется обитатель B, доверяющий тем и только тем обитателям лечебницы, которые имеют по крайней мере одного наставника, которому доверяет A. (Другими словами для любого обитателя X выполняется условие: B доверяет X, если A доверяет какому-нибудь наставнику X, и B не доверяет X, если A не доверяет никакому наставнику X.)

5. Существует один обитатель лечебницы, который доверяет всем пациентам и не доверяет никому из докторов.

Инспектор Крейг довольно долго обдумывал сложившуюся ситуацию и в конечном счете все же сумел доказать, что либо один из пациентов находится в здравом уме, либо один из докторов лишился рассудка. Сумеете ли вы найти это доказательство?

9. В девятой лечебнице.

В этой лечебнице Крейг имел беседу с четырьмя ее обитателями A, B, C и D. A считал, что психическое состояние B и C одинаково. B считал, что психическое состояние A и D одинаково. Кроме того, на вопрос инспектора, заданный C: «Являетесь ли вы и D оба докторами?», C ответил: «Нет».

Все ли обстоит благополучно в данной лечебнице?

10. В десятой лечебнице.

Инспектору Крейгу этот случай представляется особенно интересным, хотя раскрыть его оказалось весьма нелегко. Первое, с чем столкнулся инспектор в этой больнице, было то обстоятельство, что ее обитатели любили объединяться в различные комитеты. При этом, как разузнал Крейг, членами комитета могли быть, с одной стороны, как врачи, так и пациенты, а с другой — как люди в здравом уме, так и лишившиеся рассудка. Далее

Крейгу удалось выяснить следующие обстоятельства:

1. Все пациенты объединены в один комитет.

2. Все доктора также объединены в один комитет.

3. У каждого обитателя этой лечебницы имеется несколько приятелей, один из которых является его близким другом. К тому же у каждого обитателя лечебницы существует несколько недругов, один из которых является его злейшим врагом.

4. Для любого комитета C справедливо условие: все обитатели, чьи лучшие друзья входят в C, образуют комитет; все обитатели, чьи злейшие враги входят в C, также образуют комитет.

5. Для любых двух комитетов, скажем комитета 1 и комитета 2, существует по крайней мере один обитатель лечебницы D, у которого лучший друг считает, что D входит в комитет 1, а его злейший враг полагает, что D состоит в комитете 2.

Сопоставив все эти факты, Крейг весьма остроумным способом сумел доказать, что либо один из врачей лишился рассудка, либо один из пациентов находится в и здравом уме. Как инспектор догадался об этом?

11. Еще одно затруднение.

Крейг несколько задержался в описываемой лечебнице, поскольку его склонность к теоретическим рассуждениям и тут не дала инспектору покоя — внимание его привлекло еще несколько неясных вопросов. Например, ему было крайне любопытно узнать, объединялись ли все здравомыслящие обитатели лечебницы в один комитет, а также образовывали комитет те обитатели лечебницы, которые лишились рассудка. Не будучи в состоянии ответить на эти вопросы и исходя из условий 1–5 предыдущей задачи, он все же сумел доказать — причем лишь на основании условий 3, 4 и 5, — что обе эти группы не могут образовывать комитеты. Каким образом он это сделал?

12. Новое осложнение все в той же десятой лечебнице.

В конце концов Крейг сумел доказать еще одно утверждение, относящееся к обитателям этой больницы. Инспектор посчитал его весьма важным — ведь фактически оно позволило упростить решения двух последних задач. Само это утверждение заключалось в том, что для любых двух комитетов, комитета 1 и комитета 2, всегда должны найтись два обитателя E и F, такие, что E считает, будто F является членом комитета 1, а F полагает, будто E состоит членом комитета 2. Каким образом Крейг доказал это утверждение?

13. Лечебница доктора Смолля и профессора Перро.

Однако с самыми большими странностями инспектор Крейг столкнулся в последней лечебнице, которую ему довелось посетить. Лечебницей этой руководили два известных врача — доктор Смолль и профессор Перро; кроме них в штате состояло еще несколько врачей. При этом здесь неукоснительно придерживались следующих правил. Если обитатель лечебницы считал, что он является пациентом, то его называли чудаком. Если же все пациенты считали, что данный обитатель чудак, а ни один из врачей его за чудака не принимал, то такого обитателя больницы было принято именовать оригиналом. Вдобавок Крейгу удалось выяснить еще два обстоятельства: 1) по крайней мере один из обитателей больницы был вполне нормальным и 2) во всей лечебнице строго выполнялось следующее условие:

Условие С. У каждого обитателя лечебницы имеется близкий друг. При этом для любых двух обитателей А и В справедливо следующее утверждение: если А считает, что В является оригиналом, тогда близкий друг этого А полагает, что В — пациент.

Вскоре после этого открытия инспектор Крейг решил в частном порядке побеседовать с больничным руководством в лице доктора Смолля и профессора Перро. Разговор с первым из них протекал так.

Крейг. Скажите, доктор Смолль, все ли врачи в вашей больнице в здравом уме?

Смолль. Я в этом абсолютно уверен.

Крейг. А как обстоят дела с пациентами? Все ли они безумны?

Смолль. По крайней мере один из них.

Крейга поразил последний ответ — уж очень он был осторожным. Конечно, если все больные в лечебнице лишены рассудка, то утверждение, что хоть один из них безумен, представляет собой несомненную истину. Но почему доктор Смолль был так сдержан в своем утверждении?

Затем Крейг побеседовал с профессором Перро; на этот раз разговор протекал следующим образом.

Крейг. Доктор Смолль утверждает, что по крайней мере один из здешних пациентов безумен. Это правда, не так ли?

Профессор Перро. Конечно, правда. Все пациенты тут безумны! Чем же мы руководим, по-вашему?

Крейг. А как обстоят дела с врачами? Все ли они нормальны?

Профессор Перро. По крайней мере один из них нормален

Крейг. А что вы скажете о докторе Смолле? Он-то хоть нормален?

Профессор Перро. Ну, разумеется! Как вы смеете задавать мне такой вопрос?

Только в этот момент Крейг осознал весь ужас положения! В чем же он заключался?

(Те, кто читал рассказ Эдгара Аллана По «Система доктора Смолля и профессора Перро», по всей видимости, догадаются, в чем дело, еще до того, как сумеют доказать правильность найденного решения; см. также примечание в конце этой главы.)

Решения

1. Докажем, что либо Джонс, либо Смит (правда, не известно, кто именно) должен оказаться либо лишенным рассудка врачом, либо пациентом, находящимся в здравом уме (правда, мы вновь не знаем, кем именно).

Так, например, Джонс может оказаться либо безумцем, либо нормальным человеком. Предположим сначала, что он находится в здравом уме. Тогда его утверждения истинны и, следовательно, Смит на самом деле является врачом. Далее, если Смит лишился рассудка, то это значит, что он является врачом, лишившимся рассудка. Если же Смит находится в здравом уме, тогда его ответ будет истинным; это в свою очередь означает, что Джонс является пациентом, и притом нормальным (поскольку мы предположили, что Джонс находится в здравом уме). Тем самым доказано, что если Джонс находится в здравом уме, тогда либо он является находящимся в здравом уме пациентом, либо Смит оказывается лишившимся рассудка врачом.

Предположим теперь, что Джонс безумен. Тогда его суждения неверны, откуда следует вывод, что Смит является пациентом. При этом, если Смит не лишился рассудка, то он будет пациентом, находящимся в здравом рассудке. Если же Смит безумен, его суждения ложны; это означает, что Джонс должен быть врачом, причем врачом, лишившимся рассудка. В свою очередь это доказывает, что если Джонс безумен, то либо он является лишившимся рассудка врачом, либо Смит должен быть находящимся в здравом уме пациентом.

Подведем итоги: если Джонс нормальный человек, то либо он находящийся в здравом уме пациент, либо Смит является лишившимся рассудка врачом. Если же Джонс безумен, тогда либо он лишившийся рассудка врач, либо Смит должен быть находящимся в здравом уме пациентом.

2. У этой задачи много решений. Простейшее из тех, что я смог придумать, заключается в том, чтобы обитатель больницы заявил: «Я не врач, обладающий здравым умом». Тогда говорящий должен быть находящимся в здравом уме пациентом. Мы можем доказать это следующим образом.

Лишившийся рассудка врач не может верить в то, что он не является врачом в здравом уме, поскольку это правда. Нормальный врач не может придерживаться ложного убеждения, будто он не является врачом, находящимся в здравом уме. Безумный пациент не может верить в то, что он не является врачом, находящимся в здравом уме (ведь безумный пациент на самом деле не является находящимся в здравом уме врачом). Поэтому говорящий является пациентом в здравом рассудке, так что его суждение о том, что он не есть находящийся в здравом уме врач, абсолютно справедливо.

3. Одним из подходящих для данного случая утверждений является, например, такое: «Я — лишившийся рассудка пациент». В самом деле, пациент, находящийся в здравом уме, не может придерживаться ложного убеждения, будто он пациент, лишившийся рассудка. Лишившийся же рассудка пациент не может верить в то, что он является пациентом, лишившимся рассудка. Следовательно, говорящий являлся не пациентом, а врачом. В то же время врач, находящийся в здравом уме, никогда не станет считать, будто он — лишившийся рассудка пациент. Поэтому говорящий должен быть лишившимся рассудка врачом, который придерживается ложного убеждения в том, что он является лишившимся рассудка пациентом.

4. Говорящий считает, что он пациент. Если он нормальный человек, тогда он действительно будет пациентом. Таким образом, он — пациент, находящийся в здравом уме, и никак не должен оставаться в психиатрической больнице. Если же говорящий не в своем уме, тогда его суждение неверно: это означает, что он должен быть не пациентом, а врачом. Следовательно, он оказывается лишившимся рассудка врачом и тоже никак не может состоять в штате больницы. Правда, мы не можем наверняка сказать, кем же будет говорящий на самом деле — находящимся в здравом уме пациентом или безумным врачом; однако, конечно же, в любом случае в психиатрической больнице ему не место.

5. Здесь ситуация оказывается совершенно иной! Именно потому, что говорящий лишь утверждает, будто он верит в то, что является пациентом, это вовсе не обязательно должно означать, что он действительно верит в то, что он пациент. Поскольку он говорит, что верит, будто является пациентом, тогда, будучи человеком искренним, говорящий в самом деле думает, что считает себя пациентом. Предположим теперь, что говорящий сошел с ума. Тогда все его суждения — в том числе и о собственных убеждениях — будут неверными, поэтому его уверенность в том, что он считает, будто является пациентом, указывает на то, что его убеждение в том, что он пациент, является ложным, и, следовательно, на самом деле он считает, что является врачом. Но поскольку он безумен и воображает себя врачом, то, значит, фактически он пациент. Итак, если говорящий сошел с ума, то он — лишившийся рассудка пациент. С другой стороны, предположим, что говорящий — нормальный человек. Поскольку он верит в это и считает себя пациентом, его убежденность в том, будто он пациент, является истинной. И так как говорящий уверен в том, что он пациент, то он и в самом деле является пациентом. Итак, если говорящий — нормальный человек, то он все равно должен оказаться пациентом. Мы видим, следовательно, что говорящий может быть как пациентом, находящимся в здравом уме, так и пациентом, лишившимся рассудка, так что у нас нет причин считать, будто бы в этой психиатрической лечебнице сложилась неблагоприятная обстановка. Обобщая сказанное, отметим следующие основные факты.

Если обитатель данной психиатрической лечебницы убежден в чем-либо, тогда его убеждение будет либо истинным, либо ложным в зависимости от того, является ли говорящий нормальным человеком или же он лишился рассудка. Но если же обитатель лечебницы верит, будто он убежден в чем-либо, то это убеждение должно быть истинным вне зависимости от того, безумен ли говорящий или он находится в здравом уме. (Если он безумен, то эти два убеждения как бы «нейтрализуют» друг друга, совсем как по известному всем правилу «минус на минус дает плюс».)

6. В этом случае говорящий вовсе не утверждает ни того, что является пациентом, ни того, что он считает, будто является пациентом. Он утверждает лишь, что верит, будто считает, что является пациентом. Поскольку говорящий верит в то, что он утверждает, тогда он считает, что верит, будто считает, что является пациентом. Первые два утверждения «нейтрализуют» друг друга (смотри последнюю фразу в решении предыдущей задачи), так что фактически говорящий считает, будто он является пациентом. Таким образом, данная задача сводится к задаче о лечебнице номер четыре, решение которой уже получено нами (говорящий должен быть либо находящимся в здравом уме пациентом, либо утратившим рассудок врачом).

7. Крейг предложил удалить из лечебницы обитателя А, руководствуясь следующими соображениями. Предположим что А — нормальный человек. Тогда его убеждение в том, что В лишился рассудка, справедливо. Далее, поскольку В оказывается безумным, то его убеждение, будто А является врачом, ошибочно, а потому А — пациент, находящийся в здравом рассудке, и его следует выписать из лечебницы. С другой стороны допустим, что А безумен. Тогда его убеждение, что В лишился рассудка, ошибочно, и, стало быть В — нормальный человек. При этом уверенность В в том, что А является врачом, справедлива, и потому в данном случае А является лишившимся рассудка врачом которого следует выдворить из лечебницы.

Относительно же самого В никаких определенных выводов сделать нельзя.

8. Согласно условию 5 существует некий обитатель лечебницы, назовем его Артуром, который доверяет любому из пациентов и отказывает в доверии всем врачам. В то же самое время, согласно условию 4, всегда найдется другой обитатель, назовем его Билл, доверяющий только тем обитателям, которые имеют по крайней мере одного наставника, которому доверяет Артур. Это означает, что для любого обитателя X справедливо следующее утверждение: если Билл доверяет X, то Артур доверяет по крайней мере одному из наставников X, а если Билл не доверяет X, тогда Артур не доверяет ни одному из наставников X. Поскольку пользоваться доверием Артура означает то же самое, что и быть пациентом (согласно условию 5), то мы можем переформулировать последнее утверждение таким образом. Для любого обитателя лечебницы X справедливо следующее: если Билл доверяет X, то по крайней мере один из наставников X является пациентом; если же Билл не доверяет X, то тогда ни один из наставников X пациентом не является. Далее, поскольку это утверждение справедливо для любого обитателя X, то, значит, оно справедливо также и в случае, когда этим X является сам Билл. Итак, нам известны следующие факты:

1) если Билл доверяет самому себе, то у него есть по крайней мере один наставник, который является пациентом;

2) если Билл не доверяет самому себе, тогда ни один из наставников Билла не является пациентом.

Понятно, что при этом существуют две возможности: либо Билл доверяет самому себе, либо этого не происходит. Разберем теперь, что же получается в каждом из этих случаев.

Случай 1. Билл доверяет самому себе.

Тогда у Билла имеется по крайней мере один наставник, назовем его Питер, который должен быть пациентом. Поскольку Питер является наставником Билла, то Питер уверен, что Билл доверяет самому себе (согласно условию 3). Но Билл действительно доверяет самому себе, и потому убеждение Питера истинно, а значит, он нормальный человек. Стало быть, Питер — находящийся в здравом уме пациент, и ему никак не место в данной лечебнице.

Случай 2. Билл не доверяет самому себе.

В этой ситуации ни один из наставников Билла не является пациентом. Однако у Билла, как и у любого другого обитателя лечебницы, имеется по крайней мере один наставник, назовем его Ричардом; при этом ясно, что Ричард должен быть врачом. Кроме того, поскольку Ричард является наставником Билла, то, значит, Ричард полагает, что Билл доверяет самому себе. Однако его уверенность в этом оказывается ложной, и, следовательно, Ричард находится не в своем уме. Итак, Ричард является лишившимся рассудка врачом и никак не должен пребывать в штате этой лечебницы.

Подведем итоги: если Билл доверяет самому себе, то тогда по крайней мере один из пациентов данной лечебницы оказывается нормальным человеком. Если же Билл не доверяет самому себе, тогда по крайней мере один из врачей должен оказаться не в своем уме. Но так как нам не известно, доверяет ли Билл самому себе или нет, то мы не можем сказать точно, что же неладно в этой больнице — то ли туда помещен находящийся в здравом уме пациент, то ли там работает лишившийся рассудка врач.

9. Прежде всего покажем, что обитатели C и B обязательно должны быть одинаковы с точки зрения их психического состояния. Допустим сначала, что A и B являются нормальными людьми. Тогда по условию психическое состояние пары B и C (точно так же, как и пары A и D) должно быть одинаковым. Это означает, что все четверо будут находиться в здравом уме. Следовательно, в этом случае C и D будут оба нормальными людьми. Предположим теперь, что оба обитателя A и B безумны. Тогда психическое состояние пар B и C. а также A и D будет различным. Таким образом, C и D снова оказываются нормальными людьми и тем самым их психическое состояние опять будет одинаковым. Далее допустим, что A — нормальный человек, а B лишился рассудка.

Тогда, поскольку психика пары B и C одинакова, то C обязательно должен оказаться безумным, а так как психическое состояние пары A и D различно, то это означает, что D также будет безумным. Наконец. предположим, что A безумен, а B — нормальный человек. Поскольку пара B и C по условию различается по своему психическому состоянию, а пара A и D не различается, то отсюда следует, что и C, и D непременно должны быть безумными.

Резюмируя, можно сказать, что если у пары A и B состояние психики оказывается идентичным, то C и D будут нормальными людьми, если же психическое состояние A и B будет неодинаковым, то C и D обязательно должны оказаться не в своем уме.

Таким образом, мы установили, что C и D должны быть одновременно либо нормальными людьми, либо лишившимися рассудка. Предположим, к примеру, что оба они находятся в здравом уме. Тогда утверждение C, что он и D не являются оба врачами, будет истинным, откуда следует, что по крайней мере один из них является пациентом, и к тому же пациентом, находящимся в здравом уме. Если же C и D безумны, то заявление C оказывается ложным и, значит, оба они должны быть врачами, причем врачами, лишенными рассудка.

Итак, в обследованной Крейгом лечебнице содержится по крайней мере один находящийся в здравом уме пациент или работают двое лишившихся рассудка врачей.

10, 11, 12. Поначалу мы обратимся к задачам 11 и 12, поскольку самый легкий путь к решению задачи 10 состоит в том, чтобы сначала рассмотреть решение задачи 12.

Прежде чем приступить к их решению, позвольте мне сформулировать полезное правило. Пусть мы имеем два конкретных утверждения, например X и V, про которые нам известно, что они либо оба истинны, либо оба ложны. Тогда любой обитатель лечебницы, верящий в одно из этих утверждений, должен поверить также и другому. Основание: если оба утверждения истинны, то любой обитатель, который поверит одному из них, должен находиться в здравом уме, а значит, сразу должен поверить и другому утверждению, так как оно также является истинным. Если же оба утверждения ложны, тогда обитатель лечебницы, который примет за истину одно из них, непременно должен оказаться безумным, а значит, обязательно должен поверить и другому утверждению, поскольку оно тоже будет ложным.

Обратимся теперь к решению задачи 12. Рассмотрим два произвольных комитета — комитет 1 и комитет 2. Обозначим через U множество всех тех обитателей лечебницы, чьи злейшие враги объединены в комитет 1, а через V — множество всех тех обитателей, чьи лучшие друзья принадлежат комитету 2. Согласно утверждению 4, множества U и V представляют собой комитеты. Тогда в соответствии с утверждением 5 некий обитатель, назовем его Дэн, близкий друг которого, назовем его Эдвард, полагает, что Дэн входит в группу U, а злейший враг которого, назовем его Фрэд, считает, что Дэн состоит в V. Итак, Эдвард считает, что Дэн принадлежит комитету U, а Фрэд уверен, что Дэн входит в комитет V. Наконец, по определению множества U утверждение о том, что Дэн входит в U, равносильно утверждению о том, что его злейший враг Фрэд состоит в комитете 1. Другими словами, утверждения «Дэн входит в U» и «Фрэд состоит в комитете 1» либо оба истинны, либо оба ложны. Поскольку Эдвард принимает за истину одно из них, а именно, что Дэн входит в U, то он должен также принять на веру и другое, а именно что Фрэд состоит в комитете I (вспомним тут наше вспомогательное правило). Итак, Эдвард считает, что Фрэд состоит в комитете 1.

С другой стороны, сам Фрэд полагает, что Дэн входит в комитет V. Но при этом Дэн состоит в V только в том случае, если его друг Эдвард входит в комитет 2 (по определению V). Иными словами, два этих утверждения либо оба истинны, либо оба ложны. Тогда, поскольку Фрэд полагает, что Дэн входит в V, он (Фрэд) должен считать, что Эдвард состоит в комитете 2.

Таким образом, мы имеем двух обитателей, Эдварда и Фрэда, каждый из которых убежден в следующей Эдвард — что Фрэд входит в комитет 1, а Фрэд — что Эдвард состоит в комитете 2. Это и есть решение задачи 12.

Для решения задачи 10 выберем в качестве комитета 1 множество всех пациентов, а в качестве комитете множество всех врачей — эти комитеты существуют согласно условиям 1 и 2. В соответствии с решений задачи 12 существуют два обитателя лечебницы — Эдвард и Фрэд, которые уверены в следующем: Эдвард — в том, что Фрэд входит в составленный из пациентов комитет 1, а Фрэд — в том, что Эдвард входит в составленный из врачей комитет 2. Другими словами, Эдвард считает, что Фрэд является пациентом, а Фрэд уверен, что Эдвард — врач. Тогда, следуя решению задачи 1 (заменив лишь имена Джонс и Смит на Эдвард и Фрэд), мы находим, что один из названых обитателей, то есть Эдвард или Фрэд (кто именно, не известно), должен оказаться либо лишившимся рассудка врачом, либо находящимся в здравом уме пациентом. Ясно, что в любом из этих случаев ситуация в лечебнице будет явно ненормальной.

Обращаясь теперь к задаче 11, предположим, все находящиеся в здравом уме обитатели лечебницы все ее обитатели, лишившиеся рассудка, также составляют собой комитеты, а именно комитеты 1 и 2 соответственно. Тогда, согласно полученному только что решению задачи 12, обитатели Эдвард и Фрэд будут уверены в следующем:

а) Эдвард — в том, что Фрэнк находится в здравом уме, или, иными словами, что состоит членом комитета 1;

б) Фрэд — в том, что Эдвард лишился рассудка, а значит, состоит членом комитета 2.

Но это невозможно, так как если Эдвард является нормальным человеком, то его убеждения истинны, а это значит, что Фрэд находится в здравом уме. Следовательно, убеждения Фрэда истинны, а это свою очередь означает, что Эдвард лишился рассудка. Таким образом, мы получаем, что Эдвард должен быть одновременно и нормальным, и лишившимся рассудка человеком, что невозможно. С другой стороны, если Эдвард оказывается безумным, то его мнение поводу Фрэда оказывается ложным, а это значит, что Фрэд лишился рассудка. Тогда убеждения Фрэда относительно Эдварда также оказываются ложными, откуда следует, что Эдвард находится в здравом уме. Таким образом, мы имеем, что Эдвард опять должен быть одновременно и нормальным человеком, и безумным, что невозможно. Значит, допущение о том, что множество находящихся в здравом уме и множество безумных обитателей данной лечебницы представляют собой комитеты, приводит к явному противоречию. Следовательно, невозможно, чтобы обе эти группы были комитетами.

13. Вот что, к своему ужасу, понял Крейг: в последней лечебнице все врачи безумны, а все пациенты — нормальные люди! Инспектор пришел к этому выводу путем следующих рассуждений.

Еще до того, как Крейг сумел побеседовать с доктором Смоллем и профессором Перро, ему стало известно то, что в больнице имеется по крайней мере один нормальный обитатель А. Обозначим теперь через В близкого друга А. Согласно условию С, если А считает, что В является оригиналом, тогда близкий друг этого А уверен, что В — пациент. Поскольку В является близким другом этого А, тогда если А полагает, что В — оригинал, то сам В уверен, что является пациентом. Другими словами, если А считает, что В — оригинал В оказывается чудаком. Поскольку А —

нормальный человек, то уверенность A в том, что B — оригинал эквивалентна утверждению, что B — на самом оригинал. Таким образом, мы имеем следующее ключевое наблюдение:

если B оригинал, то B — чудак.

Итак, B — либо чудак, либо нет. Если B — чудак, то он уверен, что является пациентом, и, следовательно (смотри задачу 4), B должен быть либо лишившимся рассудка врачом, либо находящимся в здравом уме пациентом; в любом случае ему никак не следует находиться в больнице. Допустим теперь, что B не является чудаком. Что мы имеем тогда? Ясно, что если B не чудак, то он не будет также и оригиналом, поскольку в соответствии с ключевым наблюдением B может оказаться оригиналом только в том случае, если он является также и чудаком. Поэтому B не может быть ни оригиналом, ни чудаком. Далее, поскольку B не является оригиналом, то предположения о том, что все пациенты считают его чудаком, и о том, что ни один из врачей его чудаком не считает, не могут быть справедливы одновременно; значит, по крайней мере одно из них должно оказаться ложным. Допустим, что ложно первое из них. Тогда найдется по крайней мере один пациент P, который не считает, что B — чудак. Если бы P находился не в своем уме, то он был бы уверен, что B — чудак (поскольку B им не является). Следовательно, P — нормальный человек. В свою очередь это означает, что P — пациент, находящийся в здравом уме. Если же второе предположение оказывается ложным, тогда по крайней мере один врач, назовем его D, считает, что B — чудак. При этом D должен быть безумным (поскольку B — чудак), и, следовательно, D является врачом, лишившимся рассудка.

Подведем итоги. Если B — чудак, то он либо нормальный пациент, либо безумный врач. Если он не чудак, то либо какой-нибудь нормальный пациент P не верит, что B чудак, либо какой-нибудь безумный врач D верит в это. Следовательно, в лечебнице есть либо совершенно нормальный пациент, либо врач, лишившийся рассудка.

Как я уже упоминал, Крейг догадался обо всем этом еще до встречи с доктором Смоллем и профессором Перро. Далее, из разговора с ними инспектор выяснил, что доктор Смолль считает, будто все врачи в лечебнице — нормальные люди, а профессор Перро уверен, что все их пациенты безумны. Оба одновременно они не могут быть правы (как мы только что доказали); следовательно, по крайней мере один из них сошел с ума. Кроме того, профессор Перро полагает, что доктор Смолль является нормальным человеком. Значит, если сам профессор Перро находится в здравом уме, то он должен быть прав, и доктор Смолль действительно находится в здравом уме, хотя, как нам известно, это вовсе не так. Следовательно, профессор Перро должен быть безумным. При этом его уверенность в том, что доктор Смолль психически здоров, оказывается ложной, откуда сразу следует, что доктор также безумен. Данное рассуждение показывает нам, что и доктор Смолль, и профессор Перро оба лишились рассудка.

Теперь, поскольку доктор Смолль безумен и считает, что по крайней мере один из пациентов сошел с ума, то это означает, что на самом деле все пациенты в лечебнице должны быть нормальными людьми. Аналогичным образом, поскольку профессор Перро тоже является безумным и уверен, что, по крайней мере, один из врачей находится в здравом уме, то все врачи должны быть безумными. Таким образом, нами доказано, что все пациенты в данной лечебнице — нормальные люди, а все врачи сошли с ума.

Примечание. Эта задача, конечно же, была подсказана мне сюжетом известного рассказа Эдгара Аллана По «Система доктора Смолля и профессора Перро», в котором пациенты некоего сумасшедшего дома захватили врасплох всех своих врачей и надзирателей, вымазали их в смоле, вываляли в перьях и заперли в больничных палатах, а сами стали играть их роли.

4. Инспектор Крейг в Трансильвании

Неделю спустя после описанных приключений Крейг уже стал было собираться в Лондон, как вдруг ему вручили телеграмму от правительства Трансильвании, в которой инспектора в срочном порядке приглашали посетить эту страну, с тем чтобы помочь в расследовании нескольких загадочных случаев, связанных с вампирами, или упырями. Как уже разъяснялось в моей предыдущей книжке логических головоломок под названием «Как же называется эта книга?», одну часть населения Трансильвании составляют люди, а другую — упыри, причем люди всегда говорят правду, а упыри всегда лгут. Ситуация в этой стране крайне осложняется еще и тем, что половина всех жителей Трансильвании лишена рассудка и придерживается совершенно превратных представлений об окружающем их мире (точно так же, как и безумные обитатели психиатрической лечебницы доктора Смолля и профессора Перро): так, все истинные суждения они считают ложными, а все ложные утверждения — истинными. Другая половина жителей психически здорова и абсолютно безупречна в своих суждениях (совершенно так же, как нормальные обитатели психиатрических лечебниц в главе 3), а именно: все истинные утверждения, по их мнению, являются истинными, про ложные же утверждения они знают, что те ложны.

Конечно, трансильванская логика оказывается куда сложнее, чем в лечебницах для душевнобольных, поскольку в тех обитатели, по крайней мере, всегда честны и если говорят неправду, то по заблуждению, а не по злому умыслу. Если же ложное суждение высказывает трансильванец, то он может делать это как просто из заблуждения, так и умышленно. Люди в здравом уме и упыри, лишившиеся рассудка, изрекают только истины; люди, лишившиеся рассудка, и упыри, находящиеся в здравом уме, всегда лгут. К примеру, если вы спросите у жителя Трансильвании, круглая ли Земля (или она плоская), то человек в здравом уме, зная, что Земля круглая, так и скажет. Человек же, лишившийся рассудка, считает, что Земля не является круглой, и потому, правдиво высказывая свое мнение, будет утверждать, что Земля плоская. Упырь в здравом уме знает, что Земля круглая, но поскольку он всегда лжет, то будет говорить, что это вовсе не так. В то же время лишившийся рассудка упырь уверен, будто Земля плоская и поскольку он всегда лжет, то станет утверждать, что Земля круглая. Таким образом, ответы упыря, лишившегося рассудка, совпадают с высказываниями нормального человека, в то время как утративший разум человек будет отвечать на задаваемые ему вопросы точно так же как и упырь, находящийся в здравом уме.

К счастью, оказалось, что Крейг разбирается в проблемах вампиризма не хуже, чем в логике (круг интересов инспектора вообще был поразителен). По прибытии Крейга в Трансильванию власти страны (среди которых были лишь люди в здравом рассудке) информировали инспектора, что им потребуется помощь в проведении десяти расследований, и попросили его взять разбор этих дел на себя.

Первые пять расследований

В каждом из этих дел фигурировало по два обитателя Трансильвании. При этом заранее было известно, что один из них — человек, а второй — упырь, хотя и не было установлено кто же именно. По поводу состояния психики обитателей (исключая, впрочем, дело № 5) также не было никаких сведений.

1. Дело Люси и Минны. По первому делу проходили две сестры, которых звали Люси и Минна. Крейгу предстояло определить, кто из сестер является упырем. Как уже отмечалось ранее, относительно состояния их психики ничего известно не было. Ниже приведена запись беседы инспектора с сестрами.

Крейг (обращаясь к Люси). Расскажите что-нибудь о себе и вашей сестре.

Люси. Мы обе не в своем уме.

Крейг (обращаясь к Минне). Это правда?

Мина. Конечно же, нет!

Исходя из этих ответов, Крейг, к всеобщему удовлетворению сразу сумел догадаться, которая из сестер является упырем. Кто же это был?

2. Дело братьев Лугози. Следующее дело было связано с братьями Лугози. Обоих братьев звали Бела, только один из них был упырем, а второй нет. Братья высказывали следующие утверждения.

Бела-старший. Я человек.

Бела-младший. Я человек.

Бела-старший. Мой брат вполне нормален.

Кто из них является упырем?

3. Дело Михаэля и Петера Карлофф. В следующем расследовании перед инспектором вновь предстали два брата — на этот раз Михаэль и Петер Карлофф. Вот что они заявили.

Михаэль Карлофф. Я упырь.

Петер Карлофф. Я человек.

Михаэль Карлофф. Психическое состояние моего брата совпадает с моим. Кто из них упырь?

4. Дело де Роганов. В следующем расследовании оказались замешаны отец и сын де Роганы. Вот как выглядит запись беседы Крейга с ними.

Крейг (обращаясь к отцу). Вы оба в здравом уме или оба лишились рассудка? Или, может, вы отличаетесь друг от друга в этом отношении?

Отец. По крайней мере один из нас безумец.

Сын. Совершенно верно.

Отец. Но я-то, конечно, не упырь.

Кто из них является упырем?

5. Дело Карла и Марты Дракула. В последнем деле этой группы фигурировали двое близнецов — Карл и Марта Дракула (смею вас уверить, что в родстве со знаменитым графом они не состояли). Самое интересное в данном случае заключалось в том, что Крейгу было известно не только то, что один из них человек, а другой упырь, но и то, что один из близнецов в здравом уме, а другой лишился рассудка, хотя инспектор не имел ни малейшего представления, кто же именно. Вот запись их беседы.

Карл. Моя сестра — упырь.

Марта. Мой брат сошел с ума!

Кто из них является упырем?

Пять семейных пар

В каждом из пяти следующих случаев оказалась замешанной некая семейная пара. Сейчас в Трансильвании (слышали вы об этом или нет) людям и упырям запрещено законом вступать в браки между собой, следовательно, описываемые семейные пары состоят либо из обычных людей, либо из упырей. Во всех перечисленных случаях, как и в задачах 1–4, ровным счетом ничего не известно о психическом состоянии любого из супругов.

6. Дело Сильвана и Сильвии Нитрат. Первое расследование этой группы было связано с делом Сильвана и Сильвии Нитрат. Как мы уже упоминали, оба они могут быть одновременно либо людьми, либо упырями. Вот запись их беседы с Крейгом.

Крейг (обращаясь к миссис Нитрат). Расскажите мне что-нибудь о вашей семье.

Сильвия. Мой муж — человек.

Сильван. Моя жена — упырь.

Сильвия. Один из нас вполне нормален, а другой сошел с ума.

Кто же они — люди или упыри?

7. Дело Джорджа и Глории Глобул. Следующий случай был связан с семейством Глобул.

Крейг. Расскажите мне что-нибудь о вашей семье.

Глория. Все, что говорит мой муж, правда.

Джордж. Моя жена свихнулась.

Крейг подумал, что утверждение Джорджа о собственной жене не слишком-то учтиво, тем не менее этих двух свидетельств ему оказалось вполне достаточно, чтобы установить истину.

Из кого же состоит данная семья — из людей или из упырей?

8. Дело Бориса и Дороти Вампир.

— Надеюсь, — сказал начальник трансильванской полиции инспектору Крейгу, — что фамилия подозреваемых не повлияет на результаты расследования.

Сами опрошенные дали следующие показания.

Борис Вампир. Мы оба упыри.

Дороти Вампир. Да, это так.

Борис Вампир. Состояние нашей психики совершенно одинаково.

Что это за семейная пара?

9. Дело Артура и Лилиан Суит. Следующее расследование было связано с делом семьи иностранцев (конечно, иностранцев по отношению к Трансильвании), которых звали Артур и Лилиан Суит. Они дали такие показания.

Артур. Мы оба сошли с ума.

Лилиан. Это правда.

Кем являются Артур и Лилиан?

10. Дело Луиджи и Мануэллы Бердклифф. Семейство Бердклифф дало следующие показания:

Луиджи. По крайней мере один из нас свихнулся.

Мануэлла. Это неправда!

Луиджи. Мы оба люди, а не упыри.

Кем являются Луиджи и Мануэлла?

Еще две непредвиденные головоломки

11. Дело А и В.

Инспектор Крейг вздохнул было с облегчением, что все неприятные дела позади, и стал укладывать вещи для возвращения в Лондон, как вдруг к нему в номер неожиданно ворвался трансильванский чиновник и стал умолять инспектора задержаться хотя бы на день и помочь им разобраться с еще одним неожиданным делом. По правде говоря, перспектива задержаться Крейгу не очень-то улыбалась, но он всегда считал своим долгом оказывать посильную помощь, где возможно, и согласился.

Как оказалось, трансильванская полиция задержала двух подозрительного вида субъектов, которые при опознании оказались довольно известными в этой стране лицами, и так как Крейг просил меня, чтобы имена и пол каждого из них не предавались гласности, то я буду называть их просто А и В. В противоположность десяти описанным выше разбирательствам в данном случае ничего не было известно заранее об отношениях между ними или их причастности к той или категории. Так, оба вполне могли оказаться упырями или же людьми, или, например, один из них мог оказаться упырем, а другой — человеком. Кроме того, они могли одновременно либо находиться в здравом уме, либо быть умалишенными или же один из них мог оказаться нормальным, а другой — безумным.

На допросе А сообщил, что В находится в здравом уме, а В показал, что А лишился рассудка. Одновременно А заявил, что В является упырем, а В в свою очередь стал уверять, что А — человек.

Что можно сказать по поводу личностей А и В?

12. Два трансильванских философа.

Довольный, что со всеми жуткими делами покончено, Крейг удобно расположился в зале ожидания, предвкушая, как через четверть часа наконец-то сядет в поезд. Ему не терпелось поскорее возвратиться в

Лондон! Но тут он стал невольным свидетелем спора между двумя трансильванскими философами, которые с жаром обсуждали следующую проблему.

Пусть мы имеем двух трансильванских близнецов, о которых известно что один из них является находящимся в здравом уме человеком, а другой — лишившимся рассудка упырем. Допустим, что вы встречаете одного из них и хотите выяснить, кто же он такой. Можно ли выяснить это с помощью определенного числа вопросов, требующих ответа «да» или «нет»? Первый философ утверждал, что не существует такого набора вопросов, с помощью которых это можно было бы сделать, поскольку на любой поставленный вопрос каждый из близнецов должен дать тот же самый ответ, что и его брат. В самом деле, пусть имеется вопрос, правильный ответ на который гласит «да». В этом случае нормальный человек, зная, что ответом на поставленный вопрос является «да», правдиво ответит «да». В то же время упырь, лишившийся рассудка, будет считать, что правильным ответом является «нет», и поскольку он всегда лжет, то также ответит на поставленный вопрос словом «да». Подобным же образом, если правильным ответом на поставленный вопрос окажется «нет», то нормальный человек так и ответит «нет», а упырь, находящийся не в своем уме, вообразив, что правильным ответом является «да», солжет и также скажет «нет». Следовательно, различить братьев с точки зрения их внешнего вербального[4] поведения не представляется возможным, несмотря на то, что их головы будут работать совершенно по-разному. «Таким образом, — утверждает первый философ, — не существует вопросов, с помощью которых можно установить, кем же являются близнецы на самом деле (разве что, может быть, с помощью детектора лжи)».

Второй философ не соглашался. Правда, он не высказывал никаких доводов в поддержку своей точки зрения, а только говорил: «Позвольте мне задать несколько вопросов одному из братьев, и я скажу вам кто он!»

Крейгу, конечно, было бы интересно узнать, чем же завершился их спор, но тут как раз подали его поезд и он поспешил на посадку. Некоторое время Крейг, сидя в вагоне, размышлял, кто же из философов прав. Наконец он понял, что прав второй: в самом деле, встретив одного из близнецов, с помощью вопросов, требующих ответа типа «да — нет», вы действительно можете установить, с кем именно разговариваете, и без всякого детектора лжи. Остаются две проблемы:

1) Каково наименьшее число вопросов, которое нужно задать одному из близнецов?

2) И что еще интереснее, где кроется ошибка в рассуждениях первого философа?

Решения

Установим сначала одно правило, которое будет использовано в дальнейшем при решении нескольких задач. Вот оно: если житель Трансильвании утверждает, что он человек, то он обязательно должен находиться в здравом уме; если же трансильванец говорит, будто является упырем, то он лишился рассудка. Чтобы доказать это, будем рассуждать так. Пусть трансильванец утверждает, что он человек. При этом его утверждение может оказаться либо истинным, либо ложным. Если его высказывание истинно, то он действительно человек, а поскольку истинные суждения высказывают только нормальные люди, то, следовательно, он в здравом уме. Если же его утверждение ложно, то он на самом деле упырь, а поскольку ложные суждения высказывают только упыри в здравом уме (ведь безумные упыри всегда высказывают истинные суждения, как и люди в здравом уме), то он и в этом случае оказывается в здравом уме. Это доказывает, что если трансильванец заявляет, будто он человек, то он обязательно находится в здравом уме независимо от того, является ли он человеком на самом деле или не является.

Пусть теперь житель Трансильвании утверждает, будто он упырь. Что из этого следует? Если, к примеру, это его заявление истинно, то, значит, он на самом деле упырь, однако мы знаем, что истинные суждения высказывают лишь упыри, лишенные рассудка Точно так же, если его утверждение ложно, тогда он человек, а поскольку ложные утверждения высказываются только людьми, лишившимися рассудка, то он безумен. Таким образом, каждый трансильванец, заявляющий, что он упырь, — сумасшедший.

Надеемся, теперь, читатель сам проверит, что любой трансильванец, который заявляет, будто он в здравом уме, является человеком, а любой трансильванец, утверждающий, что он сошел с ума, на самом деле упырь

Обратимся же непосредственно к решению наших задач.

1. Утверждение Люси может быть либо истинным, либо ложным. Если оно истинно, тогда обе сестры действительно сошли с ума. Значит, сама Люси также лишена рассудка, но лишенный рассудка трансильванец, который может высказать истинное утверждение, обязательно безумный упырь. Следовательно, если высказывание Люси истинно, то она — упырь.

Допустим теперь, что утверждение Люси ложно. Тогда хотя бы одна из сестер в здравом уме. Если это сама Люси, то, высказывая ложное утверждение, она должна быть упырем (ведь люди в здравом уме высказывают только истинные суждения). Если же допустить, что Люси помешалась, тогда нормальной должна оказаться другая сестра — Минна. И тогда Мина, противореча ложному заявлению Люси, высказала истину. Следовательно, Минна находится в здравом уме и высказывает истинные утверждения; значит, Мина — человек, а Люси и в этом случае должна оказаться упырем.

Значит, независимо от того, истинно или ложно заявление Люси, сама Люси упырь.

2. Выше мы установили правило, согласно которому любой житель Трансильвании, который заявляет, что он человек, должен находиться в здравом уме, а любой трансильванец, утверждающий, что он упырь, должен оказаться лишенным рассудка (см. обсуждение этого выше). Поскольку оба брата Лугози утверждают, что они люди, оба они в здравом уме. Поэтому Бела-старший высказывает истину, когда говорит, что его брат находится в здравом уме. Итак, Бела-старший в здравом уме и высказывает истинные суждения, значит, он человек. Следовательно, упырем оказывается другой браг — Бела-младший.

3. Поскольку Михаэль утверждает, будто он упырь, то он безумец, а так как Петер заявляет, что он человек, он в здравом уме. Итак, Михаэль сошел с ума, а Петер нормален; таким образом, психическое состояние обоих братьев различно. Поэтому второе утверждение Михаэля ложно, а поскольку Михаэль умалишенный, он человек (ведь упыри, лишившиеся рассудка, не высказывают ложных утверждений). Итак, Петер — упырь.

4. И отец, и сын одинаково отвечают на вопрос относительно своего психического состояния. Это означает, что оба они одновременно либо высказывают правду, либо лгут. Но поскольку только один из них человек, а другой упырь, то по состоянию своей психики они неизбежно должны различаться между собой. Действительно, если бы оба они находились в здравом уме, тогда тот, кто является человеком, высказывал бы истинные утверждения, а другой, то есть упырь, лгал, в результате чего они никогда не смогли бы высказать единое мнение. Если бы оба они были лишены рассудка, то человек делал бы ложные заявления, а упырь говорил бы правду, что опять не позволило бы согласовать их высказывания. Таким образом, правда, что по крайней мере один из них безумен. Это доказывает, что оба они утверждают истину. Следовательно, поскольку отец заявляет, что он не упырь, значит, это и в самом деле так. Стало быть, упырем является его сын.

5. Предположим, что Марта упырь. Тогда Карл — человек и, кроме того, он высказал истинное утверждение. Значит, в данном случае Карл должен быть человеком, находящимся в здравом уме. Это заставляет нас сделать вывод, что Марта — безумный упырь, поскольку, как мы знаем уже, психическое состояние брата и сестры различно. Но тогда Марта, будучи лишившимся рассудка упырем, должна была бы высказать ложное утверждение, а именно что Карл сошел с ума, чего лишенные рассудка упыри сделать не могут. Следовательно, предположение о том, что Марта — упырь, приводит нас к противоречию, а значит, упырем должен быть ее брат Карл.

Помимо этого мы можем определить, кто из них умалишенный. Поскольку Карл высказал ложное утверждение, то будучи упырем, он должен находиться в здравом уме. Но тогда и Марта также высказывает ложное утверждение: значит, будучи человеком, она безумна. Поэтому полный ответ таков: Карл — упырь в здравом уме, а Марта — человек, лишившийся рассудка. Кроме того, Карл лжет, когда утверждает, что его сестра упырь, а Марта заблуждается, заявляя, будто ее брат безумен. (Прелестная парочка, даже для Трансильвании!)

6. Теперь мы оказываемся в ситуации, когда оба действующих лица являются одновременно либо упырями, либо людьми. Следовательно, первые два высказывания не могут одновременно быть истинными; точно так же оба они сразу не могут оказаться ложными (так как если бы это было так, то это означало бы, что Сильван — упырь, а Сильвия — человек). Поэтому одно из указанных утверждений должно быть истинным, а другое — ложным. В свою очередь это означает, что один из супругов находится в здравом рассудке, а другой сошел с ума (поскольку если бы оба они находились в здравом уме, то их высказывания оказались бы либо оба истинными, будь они людьми, либо оба ложными будь они упырями). Поэтому Сильвия права, утверждая, что один из супругов нормален, а другой сошел с ума. Это сразу означает, что Сильвия высказывает истинные утверждения, и, следовательно, ее заявление о том, что ее муж — человек, истинно. Отсюда ясно, что оба они являются людьми (к тому же

Сильвия в здравом рассудке, а Сильван безумен).

7. Заявляя, будто все, что говорит ее муж, правда, Глория тем самым соглашается с его утверждением о том, будто она сошла с ума. Другими словами, Глория неявно утверждает, что она сама лишилась рассудка! Однако такие высказывания (как мы выяснили в обсуждении, предшествующем решениям) могут делать только упыри, и поэтому Глория обязательно должна быть упырем. Таким образом, оба супруга являются упырями.

8. Допустим, что оба супруга — люди. Тогда их утверждения о том, будто оба они являются упырями ложны, откуда следует, что они — люди, лишившиеся рассудка. В свою очередь это должно означать, что их психическое состояние одинаково, и, следовательно, второе высказывание Бориса должно быть истинным, что оказывается совершенно невозможным для человека, лишившегося рассудка. Поэтому они никак не могут быть людьми, а значит, являются упырями (причем безумными).

9. Предположим, что супруги являются людьми, Нормальный человек никак не может утверждать, будто он (или она), а также кто-либо еще — оба сошли с ума; поэтому оба супруга должны быть людьми, лишившимися рассудка. Тогда перед вами окажутся лишившиеся рассудка люди, которые высказывают истинные утверждения, будто бы оба они сошли с ума, что невозможно. Поэтому они не могут быть людьми, а значит являются упырями. (При этом они могут оказаться упырями, как находящимися в здравом уме — которые лгут, когда утверждают, будто они сошли с ума, так и безумными — которые высказывают истину, говоря, что они сошли с ума. Вспомним попутно, что упыри, лишившиеся рассудка, всегда высказывают истинные суждения, хотя вовсе не собираются этого делать.)

10. Высказывания Луиджи и Мануэллы противоречат друг другу; поэтому один из них должен быть прав, а другой должен ошибаться. Таким образом, один из них высказывает истинные утверждения, а другой — ложные. Поскольку оба они либо люди, либо упыри, утверждение, что один из них лишился рассудка, обязательно должно оказаться истиной. Ведь если оба супруга находятся в здравом уме, тогда они должны высказывать либо истину — в случае, если они люди, либо ложь — если они упыри. Таким образом, Луиджи оказывается прав, утверждая, что по крайней мере один из них лишился рассудка. Значит, Луиджи высказывает истинные утверждения; в частности, он прав, когда говорит, что они оба люди. Итак, мы доказали, что оба супруга являются людьми (и к тому же, что Луиджи нормален, а Мануэлла лишилась рассудка).

11. Назовем жителя Трансильвании заслуживающим доверия, если он высказывает правильные утверждения, и не заслуживающим доверия, если утверждения, высказываемые им, ошибочны. Заслуживающими доверия трансильванцами могут быть либо люди в здравом уме, либо безумные упыри; не заслуживают доверия люди, лишенные рассудка, и упыри в здравом уме.

Пусть теперь А заявляет, что В находится в здравом уме и, кроме того, что В — упырь. Высказанные А утверждения либо оба истинны, либо оба ложны. Если они истинны, то В — упырь в здравом уме, откуда следует, что В не заслуживает доверия. С другой стороны, если оба утверждения, высказанные А, ложны, то В должен быть лишившимся рассудка человеком, что опять-таки означает, что В не заслуживает доверия. Поэтому и в том, и в другом случае (то есть когда оба утверждения А либо истинны, либо ложны) В оказывается личностью, не заслуживающей доверия. Отсюда следует, что оба утверждения, высказанные В, ложны, и А не может быть ни человеком, ни безумцем; следовательно, А должен быть упырем в здравом уме. Это означает также, что А не заслуживает доверия; поэтому оба высказывания А являются ложными, а значит В должен оказаться лишенным рассудка человеком. Итак, ответом будет:

А — упырь, находящийся в здравом уме,

В — человек, лишившийся рассудка.

Между прочим, эта задача является лишь одной из 16 задач аналогичного типа, которые можно сформулировать и которые все обладают единственным решением.

Комбинация двух произвольных высказываний, которые А может сделать относительно личности В (одно — по поводу состояния его психики и другое — относительно его природы, то есть является ли он человеком или упырем), с двумя любыми высказываниями В относительно личности А (одним — по поводу психического состояния А и другим — относительно его природы) — а для четырех таких высказываний существует 16 различных возможностей — будет однозначно определять характеристики личностей А и В. Например, если А заявляет, что В — человек и что В в здравом уме, а В утверждает, что А — упырь и к тому же лишился рассудка, то решением такой задачи будет: В — человек, находящийся в здравом уме, а А — безумный упырь. Или пусть А утверждает, что B находится в здравом уме и что B — упырь, а B в свою очередь говорит, что A лишился рассудка и тоже является упырем. Что представляют собой A и B в этом случае?

Ответ: A — нормальный человек, а B — находящийся в здравом рассудке упырь.

Сообразили ли вы, читатель, как решаются все 16 возможных задач и почему каждая из них имеет лишь единственное решение? Если нет, то давайте рассуждать так.

A может высказать 4 пары утверждений относительно личности B, а именно:

1) B находится в здравом уме, B — человек;

2) B находится в здравом уме, B — упырь;

3) B лишился рассудка, B — человек;

4) B лишился рассудка, B — упырь.

В каждом из этих четырех случаев мы можем однозначно решить, является ли B личностью, заслуживающей доверия, или не является. Так в случае 1 B обязательно должен заслуживать доверия, причем независимо от того, являются ли утверждения, высказанные A, истинными или ложными. В самом деле, если оба они истинны, то B — нормальный человек и, конечно же, заслуживает доверия; если же оба этих высказывания ложны, то B — лишившийся рассудка упырь, и значит, опять-таки заслуживает доверия. С помощью совершенно аналогичных рассуждений можно показать, что в случае 4 B также должен заслуживать доверия. С другой стороны, в случаях 2 и 3 личность B непременно должна оказаться не заслуживающей доверия. Таким образом, из утверждений, высказанных A, мы всегда можем установить «надежность» личности B, то есть заслуживает она доверия или нет. Точно так же по двум высказываниям, сделанным B, мы в свою очередь вполне можем заключить, заслуживает ли доверия A. Теперь, уже зная «надежность» A и B, можно установить, какие же из заданных четырех высказываний являются истинными, а какие — ложными. Тем самым наша задача решается однозначно.

Можно еще заметить, что если бы A и B, вместо того, чтобы высказать по два утверждения о партнере, стали бы каждый высказывать конъюнкцию этих утверждений, то задача оказалась бы неразрешимой. Так, например, если бы вместо двух отдельных высказываний — «B находится в здравом уме» и «B — упырь» — A стал бы утверждать, что «B — упырь, находящийся в здравом уме», мы не сумели бы сделать никакого вывода относительно того, заслуживает ли B доверия или нет. Это связано с тем, что если высказывание A верно, то B действительно является находящимся в здравом уме упырем, однако же, если утверждение А ошибочно, то В может оказаться и упырем, лишившимся рассудка, и нормальным человеком, и человеком, сошедшим с ума.

12. Вполне достаточно лишь одного вопроса! Все, что вам требуется, это спросить одного из братьев: «Вы человек?» (С таким же успехом подошло бы «Вы в здравом уме?» или «Вы нормальный человек?») Итак, допустим, вашему собеседнику задан вопрос: «Вы человек?» При этом, если лицо, к которому вы обращаетесь, является человеком, находящимся в здравом уме, то естественным для него ответом на ваш вопрос будет «да». Допустим теперь, что лицо, которому задан вопрос, — это лишившийся рассудка упырь. Поскольку он свихнулся, то он будет ошибочно считать, что является человеком, но, кроме того, поскольку он еще и упырь, то вынужден будет солгать и скажет «нет». Следовательно, если в качестве ответа на поставленный вопрос вы услышите «да», то перед вами — нормальный человек, если же вам ответят «нет», то перед вами — упырь, лишившийся рассудка.

Несомненно, еще более любопытен вопрос о том, в чем же ошибка в рассуждениях первого философа. Так первый философ абсолютно прав в том, что если каждому из братьев вы зададите один и тот же вопрос, то услышите один и тот же ответ. Однако этот философ не сообразил, что если каждого из братьев в отдельности спросить: «Вы человек?», то это означает, что вы задаете не один, а два различных вопроса, поскольку данная фраза содержит многозначное слово «вы», значение которого существенно зависит от того, к кому именно обращен ваш вопрос! Поэтому, задавая один и тот же вопрос двум разным людям одними и теми же словами, вы на самом деле спрашиваете о разном.

Посмотрим на это еще так. Пусть нам известны имена обоих братьев: скажем, братца — человека, находящегося в здравом уме, — зовут Джон, а его близнеца — безумного упыря — зовут, к примеру, Джим. Тогда, если я спрошу каждого из братьев: «Джон — человек?», оба брата ответят мне утвердительно, поскольку я задаю один и тот же вопрос каждому из них. Аналогично, если я спрошу: «Джим — человек?», оба брата ответят мне: «Нет». Но если обоим братьям я задам вопрос: «Вы человек?», то в каждом случае это будут существенно разные вопросы.

Часть вторая. Головоломки и метаголоволомки

5. Остров Вопрошаек

Где-то в океанских просторах есть очень странный остров, известный как остров Вопрошаек. Назвали его так потому, что обитатели этого острова никогда не высказывают никаких утверждений; они лишь задают вопросы. Как же они ухитряются общаться между собой? Об этом чуть позднее.

Так вот, обитатели острова задают друг другу только те вопросы, на которые можно ответить словами «да» или «нет». При этом каждый из них относится к одному из двух типов — типу А или типу В. Обитатели типа А задают только такие вопросы, правильным ответом на которые является «да». Обитатели же, относящиеся к типу В, задают лишь вопросы, на которые правильным ответом является отрицание «нет». Например, житель типа А может спросить: «Равняется ли два плюс два четырем?» Но он никак не мог бы спросить, например, равняется ли два плюс два пяти или шести.

1. Предположим, вы встречаете жителя этого острова, и он спрашивает вас: «Принадлежу ли я к типу В?»

Какой вывод вы можете из этого сделать?

2. Допустим, что вместо этого он спросил бы вас, относится ли он к типу А.

Какой вывод сделали бы вы тогда?

3. Как-то я посетил этот остров и встретил супружескую пару — Итана и Вайолет Рассел. Случайно я услышал, как Итан спросил кого-то:

— Относимся ли мы с Вайолет к типу В?

К какому типу относится Вайолет?

4. В другой раз я встретил двух братьев, которых звали

Артур и Роберт. Однажды Артур спросил Роберта:

— Принадлежит ли по крайней мере один из нас к типу В?

К какому типу относится каждый из братьев?

5. В следующий раз я встретил супружескую пару по фамилии Гордон. Мистер Гордон спросил свою жену:

— Дорогая, относимся ли мы с тобой к людям разного типа? Что можно сказать по поводу каждого из супругов?

6. Затем я встретил островитянина по фамилии Цорн.

Он спросил меня:

— Отношусь ли я к людям того типа, которые могли бы спросить, принадлежу ли я к типу B?

Можно ли сделать какой-либо вывод относительно Цорна или такая ситуация невозможна?

7. Перейдем теперь от возвышенного к смешному. Однажды я столкнулся с островитянином, который спросил меня:

— Принадлежу ли я к людям того типа, которые могли бы задать вопрос, что я сейчас задаю?

Можно ли сделать какое-либо заключение относительно этого островитянина?

8. В другой раз я столкнулся с супружеской парой по фамилии Клинк. Миссис Клинк спросила своего мужа:

— Относишься ли ты к людям того типа, которые могли бы спросить меня, принадлежу ли я к типу A?

Какой вывод можно сделать по поводу мистера и миссис Клинк?

9. Затем я встретил супругов Джона и Бетти Блэк. Бетти спросила своего мужа:

— Относишься ли ты к людям того типа, которые могли бы спросить, принадлежит ли по крайней мере один из нас к типу B?

К какому типу принадлежат Джон и Бетти?

Примечание. Последние две задачи напоминают мне песенку, слышанную мною много лет назад. Она входила в сборник «психоаналитических» шуточек и называлась «Мне с тобой не по себе — ты со мною не в себе».

10. Следующий эпизод оказался настоящей логической неразберихой! Я встретил трех сестер, которых звали Алиса, Бетти и Вероника. Алиса спросила Бетти:

— Относишься ли ты к людям, которые могли бы спросить Веронику, принадлежит ли она к людям, которые могли бы спросить тебя, относитесь ли вы с ней к разным типам?

Продолжая прогулку, я попытался разрешить эту задачу, однако понял наконец, что в данном случае я могу лишь определить, к какому типу относится только одна из трех девушек. Кто эта девушка и к какому типу она принадлежит?

Странная встреча

Последние три беседы на острове Вопрошаек, которые я услышал, оказались самыми странными. Три пациента, сбежавшие из одной из психиатрических лечебниц, описанных в гл. 3, тоже решили наведаться на остров. Напомним, что пациент такой лечебницы мог либо находиться в здравом уме, либо оказаться лишенным рассудка, причем нормальные пациенты придерживались абсолютно истинных убеждений, а пациенты, лишившиеся рассудка, следовали полностью неверным убеждениям. Кроме того, все пациенты независимо от того, находились они в здравом уме или лишились рассудка, были всегда правдивы. Это означало, что они никогда не высказывали никаких утверждений, не будучи уверенными в том, что эти утверждения верны.

11. На следующий день после приезда один из пациентов по имени Арнольд столкнулся с неким островитянином. Островитянин спросил его: «Считаете ли вы, что я принадлежу к типу В?» Какой вывод можно сделать относительно островитянина и что можно сказать по поводу Арнольда?

12. На следующий день второй из пациентов по имени Томас завел длинную беседу с одним из островитян (если только это можно назвать беседой — ведь Томас только высказывал суждения, а островитянин лишь задавал ему вопросы!). В какой-то момент островитянин спросил Томаса:

— Считаете ли вы, что я принадлежу к людям того типа, которые могли бы спросить вас, не лишились ли вы рассудка?

Какой вывод можно сделать относительно островитянина и что можно заключить по поводу Томаса?

13. Спустя еще несколько дней я разговорился с третьим пациентом по имени Уильям. Уильям рассказал мне, что накануне, оказавшись случайным свидетелем разговора между Томасом и островитянином по имени Хал, он будто бы слышал, как Томас заявил Халу:

— Вы относитесь к тому типу людей, которые могли бы спросить меня, считаю ли я, что вы принадлежите к типу В.

Можно ли сделать какой-либо вывод в отношении Томаса, Хала и Уильяма?

Кто волшебник?

На этом этапе моих приключений я все еще не знал, находится ли Томас в здравом уме или же он утратил рассудок, да и долго выяснять это не было возможности. На следующий день все три пациента покинули остров. Последнее, что я услышал — будто бы они добровольно возвратились в лечебницу, откуда сбежали. По-видимому, им было там совсем неплохо, поскольку все трое единодушно заявили, что действительность вне стен лечебницы показалась им еще более безумной, чем жизнь в их родном сумасшедшем доме.

Что ж, я с облегчением воспринял возврат к нормальной жизни на острове Вопрошаек. Но тут до меня дошли слухи, которыми я крайне заинтересовался, а именно будто на острове живет какой-то волшебник. Поскольку волшебники занимали меня с детства, то теперь, если бы, конечно, эти слухи подтвердились, у меня был отличный шанс встретить настоящего волшебника. Но как же мне его разыскать?

14. К счастью, один островитянин вздумал обратиться ко мне с вопросом, из которого я сразу понял, что волшебник на острове должен обнаружиться непременно.

Не можете ли Вы придумать такой вопрос?

Тут читатель, возможно, призадумается, как это до меня могли дойти слухи об островном волшебнике или вообще о чем-нибудь на острове, если жители острова не высказывают никаких утверждений, а лишь задают вопросы. Если предположить, что читатель еще не догадался, как это происходит, то решение данной задачи как раз и подскажет нам, каким же образом островитяне могут обмениваться информацией почти так же свободно, как и остальная часть человечества — хотя, быть может, и несколько более неуклюжим способом.

Можете себе представить, как я обрадовался, узнав, что на острове в самом деле проживает волшебник; к тому же мне удалось выяснить точно, что волшебник на острове только один. Но я не имел ни малейшего представления, кто он. Далее я разведал, что приезжего, который сумел бы правильно назвать его имя, ожидает большая награда. Единственная загвоздка была в том, что гостю, который в этой ситуации ошибался, немедленно отрубали голову.

Итак, на следующее утро я поднялся очень рано и пошел бродить по острову в надежде, что островитяне зададут мне достаточно вопросов, чтобы я смог с полной уверенностью сказать, кто же состоит тут волшебником.

И вот что случилось потом.

15. Первого островитянина, которого я встретил, звали Артур Гуд. Он спросил меня:

— Я — волшебник?

Достаточно ли у меня информации, чтобы выяснить, кто же является волшебником?

16. Следующего островитянина звали Бернард Грин.

Он спросил меня:

— Принадлежу ли я к людям того типа, которые могли бы спросить вас, не волшебник ли я?

Достаточно ли было мне этой информации?

17. Очередной попавшийся мне островитянин, Чарлз Мэнсфилд, спросил меня:

— Принадлежу ли я к людям того типа, которые могли бы спросить, относится ли волшебник к людям того типа, которые могли бы спросить, волшебник ли он?

Достаточно ли мне этой информации?

18. Еще одного островитянина звали Дэниел Мотт. Он задал мне такой вопрос:

— Принадлежит ли волшебник к типу B?

Достаточно ли мне этой информации?

19. Последнего островитянина звали Эдвин Друд. Он спросил:

— Относимся ли мы с волшебником к людям одного типа?

Наконец-то! Теперь у меня было достаточно сведений, чтобы разрешить загадку.

Так кто же волшебник?

Призовая задача

Ну-ка, обладаете ли вы способностями детектива? Вспомним пациента по имени Томас, который приезжал на остров. Находился ли он все-таки в здравом уме или был безумен?

Решения

1. Ни один житель этого острова не может задать вам такой вопрос. Если островитянин, относящийся к типу А, спрашивает: «Принадлежу ли я к типу В?» — правильным ответом на этот вопрос будет «нет» (так как он в самом деле не принадлежит к типу В). Но человек, относящийся к типу А, не может задать вопрос, правильным ответом на который является «нет»; следовательно, ни один островитянин типа А не может задать такой вопрос. Если же такой вопрос задает островитянин типа В, то правильным ответом на него будет «да». Но человек типа В не может задавать вопросы, на которые следует отвечать «да», и следовательно, островитянин типа В тоже никак не может задать подобный вопрос.

2. Тут мы не можем прийти ни к какому выводу. Действительно, любой житель острова может спросить, принадлежит ли он к типу А, поскольку сам он при этом может относиться как к типу А, так и к типу В. Если он относится к типу А, тогда правильным ответом на его вопрос: «Отношусь ли я к типу А?» — является «да», а человек типа А всегда может задать любой вопрос, правильным ответом на который будет «да». С другой стороны, если островитянин принадлежит к типу В, тогда правильным ответом на поставленный вопрос является «нет», а любой островитянин типа В всегда может задать вопрос, правильным ответом на который будет «нет».

3. Прежде всего мы должны выяснить, к какому типу относится Итан. Предположим, что он принадлежит к типу А. Тогда правильным ответом на его вопрос должно быть «да» (поскольку «да» является правильным ответом на вопросы, задаваемые островитянами типа А), а это означало бы, что Итан и Вайолет оба принадлежат к типу В. Тем самым Итан относился бы к типу В, и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, Итан не может принадлежать к типу А, а значит, должен относиться к типу В. Далее, поскольку он принадлежит к типу В, правильным ответом на его вопрос будет «нет», и, следовательно, они с Вайолет принадлежат к разным типам. Поэтому Вайолет должна относиться к типу А.

4. Допустим, что Артур принадлежит к типу В. Тогда, действительно, по крайней мере один из братьев относился бы к типу В, а это потребовало бы в качестве правильного ответа «да», что в свою очередь означало бы, что Артур принадлежит к типу А. Таким образом, мы приходим к противоречию, и, следовательно, Артур не может принадлежать к типу В. Стало быть, он относится к типу А. Отсюда следует, что правильным ответом на его вопрос является «да», а это означает, что по крайней мере один из братьев принадлежит к типу В. Так как Артур не принадлежит к типу В, то это должен быть Роберт. Итак, Артур относится к типу А, а Роберт — к типу В.

5. По поводу мистера Гордона нельзя сделать никакого вывода, однако миссис Гордон должна принадлежать к типу В. Основания для такого заключения следующие.

Мистер Гордон относится либо к типу А, либо к типу В. Предположим, что он относится к типу А. Тогда правильным ответом на его вопрос является «да», откуда следует, что супруги принадлежат к разным типам. При этом миссис Гордон должна принадлежать к типу В (поскольку ее муж относится к типу А, а они принадлежат к разным типам). Итак, если мистер Гордон относится к типу А, то его жена должна принадлежать к типу В.

Допустим теперь, что мистер Гордон относится к типу В. Тогда правильным ответом на его вопрос будет «нет»; это означает, что супруги не принадлежат к разным типам, то есть что они относятся к одному и тому же типу. Значит, миссис Гордон тоже относится к типу В. Итак, если мистер Гордон принадлежит к типу В, то и миссис Гордон должна относиться к этому же типу.

Это доказывает, что независимо от того, к какому типу принадлежит мистер Гордон, миссис Гордон обязательно должна принадлежать к типу В.

Другое доказательство — гораздо более простое, но в то же время более изящное — заключается в следующем.

Как мы уже знаем из первой задачи, ни один житель этого острова не может спросить, принадлежит ли он к типу В. Поэтому, если бы миссис Гордон принадлежала к типу А, тогда для островитянина спросить, отличается ли он по типу от миссис Гордон, было бы эквивалентно вопросу, принадлежит ли он к типу В, то есть вопросу, которого он задать не может. Следовательно, миссис Гордон не может принадлежать к типу А.

6. Такая ситуация вполне возможна, но при этом Цорн должен принадлежать к типу В. Самый простой способ убедиться в этом — вспомнить еще раз (см. задачу 1), что ни один житель острова не может спросить, относится ли он к типу В. Поэтому, когда Цорн спрашивает, принадлежит ли он к людям того типа, которые могли бы спросить, относится ли он к типу В, правильным ответом на этот вопрос будет «нет» (так как ни один островитянин не может спросить, относится ли он к типу В). Значит, поскольку правильным ответом является «нет», то, следовательно, Цорн должен принадлежать к типу В.

7. Поскольку островитянин все-таки задал этот вопрос, то, очевидно, он мог его задать. Следовательно, правильным ответом на его вопрос является «да», а сам он относится к типу А.

8. По поводу миссис Клинк нельзя сказать ничего определенного, а ее супруг должен относиться к типу А. Основания для такого вывода следующие. Допустим, что миссис Клинк относится к типу А. Тогда правильным ответом на ее вопрос будет «да», откуда следует, что мистер Клинк мог спросить свою жену, принадлежит ли она к типу А. А поскольку миссис Клинк по предположению принадлежит к типу А, то правильным ответом на этот вопрос будет «да», что позволяет считать мистера Клинка относящимся к типу А. Итак, если миссис Клинк принадлежит к типу А, то ее муж относится к тому же самому типу. Предположим теперь, что миссис Клинк принадлежит к типу В. Тогда правильным ответом на ее вопрос будет «нет», откуда следует, что мистер Клинк не относится к людям того типа, которые могли бы спросить ее, принадлежит ли она к типу А. Поэтому он не мог задать вопрос, правильным ответом на который являлось бы «нет», а значит, должен относиться к типу А. Итак, мистер Клинк относится к типу А, независимо от того, к какому типу принадлежит миссис Клинк.

9. Предположим, что Бетти относится к типу А. Тогда правильным ответом на ее вопрос является «да», и поэтому Джон мог спросить, принадлежит ли по крайней мере один из них к типу В. Но это приводит нас к противоречию: ведь если Джон относится к типу А, то невозможно, чтобы по крайней мере один из супругов принадлежал к типу В. Следовательно. Правильным ответом на его вопрос должно быть «нет», что невозможно для человека, принадлежащего к типу А. Если же Джон относится к типу В, тогда, действительно, по крайней мере один из них принадлежит к типу В, — ведь в этом случае «да» оказывается правильным ответом на его вопрос. Но поскольку ни один человек, относящийся к типу В, не может задать вопрос, правильным ответом на который является «да», то предположение о том, что Бетти принадлежит к типу А, неверно и, значит, она должна относиться к типу В.

Теперь, поскольку Бетти относится к типу В, то правильным ответом на ее вопрос является «нет»; отсюда следует, что Джон никак не может спросить ее, принадлежит ли по крайней мере один из них к типу В. Далее, если бы Джон относился к типу А, тогда он в самом деле мог задать такой вопрос, поскольку, действительно, по крайней мере один из них (а именно Бетти) принадлежит к типу В. Но поскольку задать такой вопрос он не может, то, следовательно, он тоже должен относиться к типу В.

Итак, ответ таков: оба супруга принадлежат к типу В.

10. Легче всего строить решение этой задачи поэтапно. Прежде всего докажем следующие два утверждения:

Утверждение 1. Для любого островитянина X, относящегося к типу А, справедливо следующее: никто из жителей острова не может спросить, принадлежат ли он (она) и этот X к разным типам.

Утверждение 2. Для любого островитянина X, относящегося к типу В, справедливо следующее: любой обитатель острова всегда может спросить, принадлежат ли он (она) и этот X к разным типам.

Утверждение 1 фактически доказано при решении задачи 5, когда мы убедились, что если бы миссис Гордон относилась к типу А, то мистер Гордон никак не мог бы спросить, принадлежат ли он и его супруга к одному типу.

Что же касается утверждения 2, то в случае, если X относится к типу В, вопрос, относятся ли некто и житель острова X к разным типам, эквивалентен вопросу, принадлежит ли этот некто к типу А, а такой вопрос, как мы уже выяснили при решении задачи 2, может задать любой островитянин. Таким образом, если X принадлежит к типу В, то любой житель острова может спросить X, относится ли он (она) вместе с X к разным типам.

Обратимся теперь к решению самой задачи. Докажем сначала, что правильным ответом на вопрос Алисы является «нет» и поэтому Алиса должна принадлежать к типу В. Другими словами, докажем, что Бетти никак не может спросить Веронику, относится ли Вероника к такому типу людей, которые могли бы спросить Бетти, принадлежат ли Вероника и Бетти к разным типам.

Предположим, что Бетти задает Веронике вопрос, может ли Вероника спросить, относятся ли Вероника и Бетти к разным типам. Тогда мы приходим к следующему противоречию. Действительно, Бетти может относиться как к типу А, так и к типу В. Допустим, что она относится к типу В. Тогда, согласно утверждению 1, Вероника не может спросить, относятся ли они с Бетти к разным типам. Следовательно, ответом на вопрос Бетти является «нет», а такой ответ невозможен, так как Бетти принадлежит к типу А. С другой стороны, предположим, что Бетти относится к типу В. Тогда, согласно утверждению 2, Вероника вполне могла бы спросить, относятся ли они с Бетти к разным типам; это означает, что правильным ответом на вопрос Бетти должно быть «да», что невозможно, поскольку Бетти принадлежит к типу В.

Тем самым доказано, что Бетти никак не может задать Веронике вопрос, о котором Алиса спрашивает Бетти, могла ли бы она его задать… Поэтому правильным ответом на вопрос Алисы является «нет», и, значит, сама Алиса относится к типу В. Что же касается того, к какому типу относятся Бетти и Вероника, то этого выяснить нельзя.

11. По-моему, это самая занятная задача этой главы. Мы ничего не можем сказать об островитянине, задавшем вопрос Арнольду, но в то же время Арнольд, который и рта не раскрывал (насколько мы это знаем), должен оказаться сумасшедшим. В самом деле, ни один островитянин не мог бы спросить находящегося в здравом уме человека, полагает ли он, что сам островитянин принадлежит к типу В, поскольку вопрос, обращенный к нормальному человеку, считает ли он, что тот или иной факт имеет место, равносилен вопросу, имеет ли этот факт место в действительности. В то же время ни один островитянин не может спросить, принадлежит ли он к типу В. Итак, ни один островитянин, назовем его X, не мог бы спросить находящегося в здравом уме человека, полагает ли он, что сам X относится к типу В.

С другой стороны (а этот факт потребуется нам при решении последующих задач), любой островитянин X мог бы спросить человека, лишившегося рассудка, считает ли тот, что сам X принадлежит к типу В, поскольку спросить об этом безумного равносильно тому, чтобы X спросил, принадлежит ли сам X к типу А, что, как мы уже видели, вполне позволительно для любого островитянина X.

12. По поводу Томаса мы не можем сделать никакого вывода, а островитянин, задавший вопрос, должен принадлежать к типу В. В самом деле, если предположить, что он принадлежит к типу А, то тогда правильным ответом на его вопрос будет «да», откуда следует, что Томас действительно считает, будто островитянин мог бы его спросить, лишился ли он рассудка. Но при этом Томас может оказаться как в здравом уме, так и лишенным рассудка. Предположим, что он находится в здравом уме. Тогда его убеждения правильны, а это в свою очередь означает, что островитянин вполне мог спросить его, лишился ли он рассудка. Однако человек, относящийся к типу А, может задавать только такие вопросы, правильным ответом на которые является «да»; это означало бы, что Томас должен оказаться безумным. Итак, предположение о том, что Томас — нормальный человек, позволяет сделать вывод, что Томас сошел с ума, то есть приводит нас к противоречию. С другой стороны, предположим, что Томас лишился рассудка. Тогда убеждение Томаса в том, что островитянин может его спросить, лишился ли Томас рассудка, ошибочно; следовательно, житель острова никак не может спросить его, лишился ли он рассудка. (В этом случае Томас ответил бы «нет», что невозможно, поскольку по условию островитянин принадлежит к типу А.) Однако если принять, что Томас сошел с ума и что островитянин относится к типу А, то житель острова вполне мог бы, следуя законам острова Вопрошаек, спросить Томаса, лишился ли он рассудка (поскольку правильным ответом на этот вопрос было бы «да»). Итак, предположение о том, что Томас сошел с ума, также приводит нас к противоречию.

Поэтому единственный способ избежать противоречия — это предположить, что островитянин должен относиться не к типу А, а к типу В; в этом случае никаких противоречий не возникает, независимо от того, находится ли Томас в здравом уме или он лишился рассудка.

13. Покажем, что эпизод, о котором рассказал Уильям, никак не мог иметь место в действительности. Поэтому Уильям, который уверен, будто это произошло на самом деле, обязательно должен оказаться безумным.

Итак, пусть подобная история и в самом деле имела место — в этом случае мы сразу приходим к противоречию. Действительно, предположим поначалу, что Томас — нормальный человек. Тогда его утверждения верны, откуда следует, что Хал вполне мог спросить Томаса, считает ли тот, будто Хал принадлежит к типу В. Но в соответствии с решением задачи 11 из этого следует, что Томас лишился рассудка! А это противоречит предположению, что Томас — нормальный человек. С другой стороны, допустим, что Томас сошел с ума. Тогда его утверждения ошибочны, и, следовательно, Хал никак не мог бы спросить Томаса, считает ли он, будто Хал относится к типу В. Но, как мы видели в задаче 11, житель острова вполне может спросить человека, лишившегося рассудка, считает ли он, что сам островитянин принадлежит к типу В. Итак, в этом случае мы вновь приходим к противоречию.

Единственный способ избежать противоречия — это принять, что Томас никогда не задавал такой вопрос ни одному островитянину, а Уильям просто вообразил себе, будто Томас это сделал.

14. Здесь могут сработать самые разные вопросы; мне больше всего нравится такой: «Отношусь ли я к людям, которые могут спросить, имеется ли на этом острове волшебник?»

Предположим, что тот, кто спрашивает, принадлежит к типу А. Тогда правильным ответом на его вопрос является «да». Человек, задающий вопрос, вполне может спросить, имеется ли на острове волшебник. Поскольку этот человек принадлежит к типу А, то он может спросить, имеется ли на острове волшебник только в том случае, если на острове в самом деле есть волшебник (с тем, чтобы правильным ответом оказалось бы «да»). Таким образом, если спрашивающий принадлежит к типу А, то на острове непременно должен быть волшебник.

Предположим теперь, что тот, кто спрашивает, относится к типу В. Тогда правильным ответом на его вопрос будет «нет», а это означает, что он не может спросить, имеется ли на острове волшебник. Далее, если бы на острове волшебника не было, то человек, задавший подобный вопрос (так как он принадлежит к типу В), вполне мог бы спросить, имеется ли на острове волшебник (поскольку правильным ответом в таком случае являлось бы «нет»). Однако поскольку островитянин не может (как мы убедились) задать этот вопрос, то отсюда следует, что на острове действительно должен быть волшебник. Тем самым доказано, что если человек, задающий вопрос, принадлежит к типу В, то на острове имеется волшебник. Итак, независимо от того, принадлежит спрашивающий к типу А или к типу В, на острове обязательно должен оказаться волшебник.

15. Конечно же, нет!

16. Единственный вывод, который можно сделать, — это то, что Бернард Грин не является волшебником (на основании тех же рассуждений, что и при решении задачи 14).

17. Единственный вывод, который можно сделать, — это то, что волшебник принадлежит к людям, которые могли бы спросить, волшебник ли Чарлз Мэнсфилд.

(Напомним, что, как мы выяснили при решении задачи 11, в случае, если островитянин спрашивает: «Принадлежу ли я к людям, которые могли бы спросить, имеет ли место какое-либо утверждение?», то это утверждение обязательно должно оказаться истиной.)

18. Все, что мы можем сказать, — это то, что Дэниел Мотт не является волшебником (потому что волшебник не может спросить, относится ли он сам к типу В; ведь на самом деле никто не может спросить, относится ли он к типу В).

19. Из того, что Эдвин Друд спрашивает сам по себе, невозможно заключить, кто же является волшебником. Но если использовать не только его вопрос, но и ранее заданные вопросы, то задача становится вполне разрешимой!

Прежде всего из вопроса Эдвина Друда следует, что волшебник должен принадлежать к типу А. В самом деле, предположим, например, что Эдвин относится к типу А; тогда правильным ответом на его вопрос будет «да». Поэтому и он, и волшебник фактически должны принадлежать к одному и тому же типу, а значит, волшебник тоже должен относиться к типу А. С другой стороны, предположим, что Эдвин относится к типу В. Тогда правильным ответом на его вопрос окажется «нет», откуда следует, что волшебник не может принадлежать к тому же типу, что и Эдвин. Но поскольку Эдвин относится к типу В, а волшебник к этому типу не принадлежит, то волшебник опять-таки должен относиться к типу А. Итак, мы доказали, что волшебник принадлежит к типу А. Далее, как мы установили при решении задачи 17, волшебник вполне мог бы спросить, не является ли волшебником Чарльз Мэнсфилд. Но поскольку волшебник принадлежит к типу А, то правильным ответом на этот вопрос является «да». Следовательно, волшебником должен быть Чарльз Мэнсфилд!

Призовая задача. Я уже рассказывал вам, что Арнольд, Томас и Уильям в конце концов единодушно согласились с тем, что жизнь вне стен лечебницы для душевнобольных оказалась еще более безумной, чем в чем в ней самой. Поэтому так как Томас согласен с Арнольдом и Уильямом, которые лишены рассудка, то и сам Томас также должен оказаться безумным.

6. Остров Сновидений

Однажды мне приснился необычный остров под названием остров Сновидений. Жители этого острова видят очень яркие сны; при этом во время сна их мысли столь же отчетливы, как и наяву. Более того, их жизнь во сне в дневное время течет точно так же, как жизнь наяву в течение ночи. В результате некоторые островитяне подчас никак не могут сообразить, спят они в данный момент или бодрствуют.

К тому же оказывается, что все жители острова делятся на две категории: они бывают дневного и ночного типа. Отличительная особенность островитянина дневного типа состоит в следующем: все то, во что он верит во время своего бодрствования, является истинным, а все то, о чем он думает, пока спит, оказывается ложным. Обитатель же острова, относящийся к ночному типу, представляет собой полную его противоположность: все то, в чем убежден такой островитянин, пока он спит, является истинным, а все то, во что он верит во время своего бодрствования, оказывается ложным.

1. Как-то один из островитян решил, что он относится к дневному типу. Можно ли как-нибудь проверить, было ли его убеждение правильным? Возможно ли определить, бодрствовал он в этот период или спал?

2. В другом случае один островитянин посчитал, будто он в данный момент спит. Можно ли проверить правильность его суждения? Можно ли определить, к какому он типу принадлежит?

3. а) Верно ли, что мнение островитянина по поводу того, относится ли он к дневному, или ночному типу, никогда не меняется?

б) Верно ли, что представление островитянина о том, бодрствует ли он в данный момент или спит, никогда не меняется?

4. Как-то одна из жительниц острова решила, что она либо спит, либо относится к ночному типу, либо имеет место и то и другое сразу. («Либо» в данном случае означает по крайней мере одну или, быть может, обе возможности.)

Можем ли мы определить, спала она или бодрствовала в данный момент? Можем ли мы также выяснить, к какому типу принадлежит эта обитательница острова?

5. Как-то один островитянин посчитал, будто он спит и относится к дневному типу. Что можно сказать о нем на самом деле?

6. На острове живет супружеская пара по фамилии Калп. В какой-то момент мистер Калп счел, что он вместе со своей женой принадлежит к ночному типу. В то же самое время миссис Калп сочла, что оба они не принадлежат к ночному типу. При этом оказалось, что один из них в этот момент бодрствовал, а другой спал.

Кто же из них бодрствовал?

7. На острове живет еще одна супружеская пара по фамилии Байрон. Один из супругов принадлежит к ночному типу, а другой — к дневному. В какой-то момент жена Байрона сочла, что они оба либо бодрствуют, либо спят одновременно. В тот же момент ее муж счел, что это не так.

Кто из них был прав?

8. А вот особенно интересный случай: как-то раз один островитянин по имени Эдвард подумал с удивлением, что он и его сестра Элейн принадлежат к ночному типу, и в то же время — будто он сам к ночному типу не относится.

Как это могло случиться? Принадлежит Эдвард к ночному или дневному типу? А к какому типу относится его сестра? Спал Эдвард в этот момент или бодрствовал?

9. Королевская семья. На острове Сновидений есть король, королева и принцесса. Однажды принцесса подумала, что ее родители принадлежат к разным типам. Спустя 12 часов состояние ее изменилось (то ли она проснулась, то ли заснула), и тогда она решила, что ее отец относится к дневному типу, а мать — к ночному.

К какому типу принадлежит король, и к какому типу — королева?

10. А что думаете вы по поводу колдуна? Ясно, что на таком острове никак нельзя обойтись без чародея, волшебника, колдуна или еще кого-нибудь в том же духе. Оказывается, на острове действительно имеется колдун и притом только один. А теперь позвольте предложить вам крайне любопытную задачку, связанную с этим колдуном.

Как-то раз один островитянин по имени Орк размышлял о том, не является ли он сам колдуном. В конце концов Орк пришел к выводу, что если он принадлежит к дневному типу и в этот момент бодрствует, то именно он должен быть колдуном. В то же самое время другой островитянин по имени Борк заключил, что если он либо принадлежит к дневному типу и бодрствует, либо принадлежит к ночному типу и спит, то он (Борк) и есть колдун. Далее выяснилось, что Орк и Борк в это время либо оба одновременно спали, либо бодрствовали.

К какому типу принадлежит колдун — к дневному или ночному?

11. Метаголоволомка. Однажды я предложил своему приятелю следующую задачу об этом острове:

— Один островитянин в свое время полагал, будто он принадлежит к дневному типу и бодрствует. Кто он на самом деле?

Приятель подумал немного и затем ответил:

— По-моему, этих сведений явно недостаточно, чтобы сказать что-либо определенное.

Разумеется, мой друг был абсолютно прав! Но потом он спросил меня:

— А сам-то ты знаешь, к какому типу он относился и спал он в тот момент или бодрствовал?

— Ну, конечно, — ответил я. — Как раз я хорошо знаком с этим островитянином и прекрасно знаю, к какому типу он принадлежит и в каком состоянии он в то время находился.

Тогда мой приятель задал мне весьма хитроумный вопрос:

— А скажи, если бы ты мне сообщил, к какому типу он принадлежит, было бы у меня достаточно информации, чтобы узнать, спал он или бодрствовал в тот момент?

Я сказал ему правду (то есть ответил «да» или «нет»), и он тут же сумел решить задачу.

К какому типу относился островитянин и спал он в то время или бодрствовал?

12. Более сложная метаголоволомка. В другой раз я предложил приятелю следующую задачу, связанную с этим островом:

— Одна жительница острова в какой-то момент сочла, будто она принадлежит к ночному типу и спит. Что было с ней на самом деле?

Мой друг тотчас же сообразил, что этих сведений опять недостаточно.

— Предположим, ты сообщил бы мне, к какому типу относилась эта женщина, — сказал мне приятель. — Сумел бы я тогда ответить, спала она в тот момент или бодрствовала?

Я сказал ему правду, но он все равно не смог решить задачу (и этой информации оказалось недостаточно).

Спустя несколько дней я задал эту задачу другому приятелю (не упоминая о своем первом опыте). Этот приятель также понял, что я сообщил ему слишком мало. Тогда он задал мне следующий вопрос:

— Допустим, ты сказал бы мне, спала островитянка в тот момент или бодрствовала. Хватило бы мне информации, чтобы выяснить, к какому типу она принадлежит?

Я снова ответил правду, однако приятель и тут оказался не в состоянии решить задачу (у него тоже не было достаточно информации).

Но зато теперь у вас, читатель, имеется вполне достаточно сведений, чтобы получить ответ! Итак, к какому типу относилась обитательница острова и спала она в то время или бодрствовала?

Эпилог

Предположим, что остров, описанный в этой главе, существовал бы в действительности, а я был бы одним из его обитателей. К какому типу относился бы тогда я — к дневному или ночному? На этот вопрос заведомо можно ответить, основываясь на сказанном мною в данной главе!

Решения

1, 2, 3. Прежде всего заметим, что на острове должны выполняться следующие правила:

Правило 1. Во время бодрствования любой житель острова считает, что он принадлежит к дневному типу.

Правило 2. Во время сна любой островитянин полагает, что он принадлежит к ночному типу.

Правило 3. Жители дневного типа всегда уверены, что они бодрствуют.

Правило 4. Жители ночного типа всегда уверены, что они спят.

Для доказательства правила 1 предположим, что X — житель острова, который в данный момент не спит. Если X принадлежит к дневному типу, тогда он одновременно принадлежит к дневному типу и бодрствует; значит, его суждения в этот момент правильны, и он знает, что относится к дневному типу. С другой стороны, предположим, что X принадлежит к ночному типу. Тогда, поскольку он относится к ночному типу и в данный момент бодрствует, его суждения неверны; поэтому он ошибочно полагает, будто он относится к дневному типу. Итак, суммируя, имеем: когда X бодрствует, то если он принадлежит к дневному типу, он (правильно) считает, что относится к дневному типу; если же он относится к ночному типу, то он (ошибочно) полагает, будто также принадлежит к дневному типу.

Правило 2 доказывается аналогично: когда X спит, то если этот островитянин принадлежит к ночному типу, он (правильно) считает, что он относится к ночному типу, а если он принадлежит к дневному типу, то он (ошибочно) полагает, будто также относится к ночному типу.

Для доказательства правила 3 предположим, что обитатель острова X принадлежит к дневному типу. Пока он не спит, его суждения правильны и, следовательно, он твердо убежден, что бодрствует. Но во время сна его суждения неверны, и, следовательно, тогда он ошибочно полагает, будто он бодрствует. Итак, во время бодрствования он (правильно) считает, что бодрствует, а во время сна он (ошибочно) полагает, будто также бодрствует.

Правило 4 доказывается аналогично правилу 3, и мы предоставляем это сделать самому читателю.

Обращаясь теперь к решению задачи 1, заметим, что в данном случае невозможно определить, правильно ли суждение островитянина. Однако ясно, что в указанный момент он должен был бодрствовать, поскольку если бы островитянин спал, то он был бы убежден, что принадлежит не к дневному, а к ночному типу (согласно правилу 2).

Что касается задачи 2, то здесь также нельзя определить, было ли суждение островитянина верным, однако ясно, что он должен принадлежать к ночному типу, поскольку если бы это было не так, то данный житель острова был бы уверен, что он бодрствует, а не спит (согласно правилу 3).

В отношении же задачи 3 ответом па вопрос «а» является «нет» (потому что в соответствии с правилами 1 и 2 мнение островитянина но поводу того, принадлежит он к дневному или ночному типу, изменяется в зависимости от его состояния (то есть, от того, бодрствует он или же спит), а ответом на вопрос «б» является «да» (в соответствии с правилами 3 и 4).

4. Вы можете решать эту задачу последовательно, рассматривая по очереди каждый из следующих четырех вариантов: 1) островитянка относится к ночному типу и спит, 2) она принадлежит к ночному типу и бодрствует, 3) она относится к дневному типу и спит, 4) она принадлежит к дневному типу и бодрствует.

Можно выяснить, какой же из вариантов не противоречит условиям задачи. Тем не менее я предпочел бы следующее доказательство.

Прежде всего, могут ли убеждения обитательницы острова оказаться ошибочными? Если это так, то она не может ни находиться во сне, ни принадлежать к ночному типу, откуда следует, что она бодрствует и относится к дневному типу. Но такое утверждение приводит нас к противоречию, поскольку человек, который бодрствует и относится к дневному типу, никак не может обладать неверными убеждениями. Таким образом, ее убеждения не могут оказаться ошибочными, а значит, они должны быть верными. Следовательно, данная жительница острова принадлежит к ночному типу и спит.

5. Эту задачу тоже можно решить, последовательно перебрав четыре возможных ответа, но я вновь предпочитаю более творческое решение.

Итак, могло ли мнение этого островитянина оказаться правильным? Если да, то, значит, он действительно находился во сне и принадлежал к дневному типу. Но будучи таковым (то есть спящим и дневного типа), он никак не мог обладать правильным мнением. Таким образом, его суждение было бы ошибочным. Но единственные случаи, когда житель острова может иметь ошибочное суждение — это, когда он либо находится во сне и принадлежит к дневному типу, либо бодрствует и относится к ночному типу. Вместе с тем, если бы островитянин находился во сне и принадлежал к дневному типу, то его суждение оказалось бы правильным (ибо это и есть то, во что он верит). Следовательно, он должен был бодрствовать и относиться к ночному типу.

6. Если вы начнете решать эту задачу перебором, то вам придется рассмотреть 16 случаев! (Четыре возможности для мужа, и для каждого из этих 4 вариантов еще 4 — для жены.) К счастью, есть более простой подход. Прежде всего, поскольку один из супругов спит, а другой бодрствует, и, кроме того, поскольку их суждения прямо противоположны, то они непременно должны принадлежать к одному и тому же типу (то есть оба они одновременно должны относиться либо к дневному, либо к ночному типу). В самом деле, если бы они принадлежали к разным типам, то их суждения оказались бы прямо противоположными в случае, если бы они оба спали или оба бодрствовали, и совпали бы в случае, если бы один из них спал, а другой бодрствовал. Но поскольку мнения супругов, когда один из них спит, а другой бодрствует, не совпадают, то, значит, они должны принадлежать к одному типу.

Предположим поначалу, что оба они относятся к ночному типу. Тогда мнение мужа в тот момент было правильным, и, поскольку он относится к ночному типу, то, понятно, он должен был находиться во сне. Допустим теперь, что оба супруга принадлежат к дневному типу. Тогда очевидно, что муж ошибался, полагая, будто и он, и жена относятся к ночному типу, но поскольку он, согласно условию, принадлежит к дневному типу и к тому же мнение его ошибочно, то он в это время должен был находиться во сне. Итак, независимо от того, к какому типу относятся оба супруга, муж в тот момент должен был спать, а жена — бодрствовать.

7. Эта задача еще проще. Действительно, поскольку супруги принадлежат к разным типам, то их суждения должны быть прямо противоположными, если они находятся в одном и том же состоянии(то есть оба бодрствуют или оба спят), и одинаковыми, если они находятся в различных состояниях (то есть один из них спит, а другой бодрствует). Но поскольку в описываемом случае их мнения оказались противоположными, то, значит, оба они были в одном и том же состоянии, то есть оба спали или бодрствовали. Стало быть, жена Байрона была права.

8. Очевидно, в тот момент Эдвард находился несколько не в себе, одновременно придя к двум логически сключающим друг друга суждениям! Итак, оба утверждения Эдварда должны быть ошибочными. Но поскольку он считал, будто и он, и Элейн относятся к ночному типу, то, значит, оба они к ночному типу не принадлежат. А поскольку он к тому же полагал, что сам он к ночному типу не относится, то, следовательно, как раз он-то и принадлежит к ночному типу. Таким образом, Эдвард относится к ночному типу, но оба они к ночному типу не принадлежат, и, стало быть, Элейн относится к дневному типу. Наконец, поскольку Эдвард относится к ночному типу и в то же время высказал ошибочное суждение, то он должен был бодрствовать. Поэтому ответ таков: сам Эдвард принадлежит к ночному типу и в тот момент бодрствовал, а его сестра относится к дневному типу.

9. Поскольку принцесса перешла в другое состояние, то, стало быть, одно из двух ее суждений было правильным, а другое ошибочным. Это означает, что из следующих двух высказываний одно истинно, а другое ложно:

(1) Король и королева принадлежат к разным типам.

(2) Король относится к дневному типу, а королева принадлежит к ночному типу.

Если высказывание (2) истинно, тогда высказывание (1) также должно быть истинным, однако мы знаем, что высказывания (2) и (1) не могут быть истинны одновременно. Таким образом, высказывание (2) должно быть ложным, а высказывание (1) — истинным. Поэтому король и королева действительно принадлежат к разным типам, но утверждение, что король относится к дневному типу, а королева — к ночному, не соответствует истине. Следовательно, король должен относиться к ночному типу, а королева — к дневному.

10. Предположим, что Орк принадлежит к дневному типу и в тот момент бодрствовал. Следует ли из этого предположения, что Орк должен быть колдуном? Да, следует, и вот почему. Допустим, что Орк действительно относится к дневному типу и в то время бодрствовал. Тогда его суждения правильны, откуда следует, что в случае, если он относится к дневному типу и бодрствует, то он и есть колдун. Но он принадлежит к дневному типу и бодрствует (лишь по предположению), следовательно, он должен быть колдуном (опять-таки, конечно, при условии, что он относится к дневному типу и бодрствует). Таким образом, предположение о том, что Орк относится к дневному типу и бодрствует, приводит нас к выводу, что он — колдун. Это, разумеется, вовсе не указывает ни того, что исходное предположение правильно, ни того, что он колдун, — мы доказали только то, что если бы он относился к дневному типу и бодрствовал, то в этом случае он должен был быть колдуном. Итак, мы установили гипотетическое утверждение, что если бы Орк принадлежал к дневному типу и бодрствовал, то в таком случае он — колдун. Но именно в это гипотетическое утверждение Орк в тот момент и верил; следовательно, мнение Орка было верным! Это означает, что Орк в то время либо относился к дневному типу и бодрствовал, либо принадлежал к ночному типу и спал, однако (пока) мы не можем точно сказать, какой из этих двух вариантов имел место на самом деле. Поэтому наше допущение о том, что Орк является колдуном, совсем не обязательно должно быть истиной, поскольку вполне может оказаться, что он принадлежит к ночному типу и в тот момент спал.

Далее, рассуждая подобным же образом, мы полагаем, что суждение Борка тоже верно. В самом деле, если Борк принадлежит к дневному типу и бодрствует или относится к ночному типу и спит — то в любом из этих случаев его суждение является правильным, откуда следует, что он непременно должен быть колдуном. Но это то, во что верит Борк, и, следовательно, его суждение верно. Теперь, поскольку суждение Борка верно, он либо относится к дневному типу и в тот момент бодрствовал, либо принадлежит к ночному типу и в тот момент спал. Однако же и в том, и в другом случае он должен быть колдуном.

Поскольку Борк — колдун, то, значит, Орк в свою очередь колдуном не является. Стало быть, Орк не мог в тот момент бодрствовать и не мог принадлежать к дневному типу, поскольку мы установили, что если бы это оказалось именно так, то колдуном обязательно должен был быть он. Таким образом, Орк в тот момент находился во сне и, кроме того, он принадлежит к ночному типу. Следовательно, Борк в тот момент тоже находился во сне, а поскольку суждение Борка оказалось правильным, то, значит, Борк должен относиться к ночному типу. Итак, колдун относится к ночному типу.

11. Из того, что островитянин считал, будто он принадлежит к дневному типу и бодрствует, мы можем сделать лишь один вывод — что он не относился к ночному типу и не спал. При этом у нас имеются три возможности.

(1) Он принадлежал к ночному типу и бодрствовал (причем его суждения были ошибочными).

(2) Он принадлежал к дневному типу и спал (и его суждения были ошибочными).

(3) Он принадлежал к дневному типу и бодрствовал (и его суждения были правильными).

Предположим теперь, что я сообщил моему приятелю, к какому типу относится островитянин. Мог бы в таком случае мой приятель решить задачу? Так вот, это в огромной степени зависело бы от того, что именно я ему сказал. Если бы я сообщил ему, что островитянин относится к ночному типу, тогда он сразу понял бы, что вариант (1) является при этом единственно возможным, и поэтому тотчас же сообразил бы, что островитянин бодрствовал. С другой стороны, если бы я сказал ему, что островитянин принадлежит к дневному типу, то это сразу исключило бы вариант (1), но сохранило бы варианты (2) и (3), причем мой приятель никак не смог бы выяснить, какая же из этих двух возможностей имеет место в действительности. Таким образом, в последнем случае он не сумел бы решить задачу.

Вместе с тем мой друг вовсе не требовал от меня ответа на вопрос, к какому типу относится островитянин; он лишь спросил меня, смог бы он решить задачу, если бы я сообщил ему, к какому типу принадлежит данный житель острова. На самом деле, если бы островитянин принадлежал к дневному типу, то на вопрос приятеля я должен был бы ответить «нет» (потому что, как показано выше, если бы я сообщил ему, что островитянин принадлежит к дневному типу, то он вообще не смог бы решить задачу). В то же время если бы житель острова относился к ночному типу, то на вопрос приятеля я ответил бы «да» (потому что, как мы только что показали, если бы я сообщил ему, что островитянин относится к ночному типу, то мой приятель вполне мог бы решить задачу). Таким образом, поскольку мой друг знал, что островитянин относится к ночному типу и бодрствует, то, стало быть, я ответил ему «да».

12. Из того, что жительница острова полагала, будто она принадлежит к ночному типу и спит, мы можем сделать один-единственный вывод — что она не принадлежала к дневному типу и не бодрствовала. При этом у нас остаются три возможности:

(1) Она принадлежала к ночному типу и спала.

(2) Она принадлежала к ночному типу и бодрствовала.

(3) Она принадлежала к дневному типу и спала. Если бы на вопрос моего первого приятеля я ответил «да», он тотчас же догадался бы, что единственной возможностью решения задачи в таком случае является вариант (3) (рассуждая при этом совершенно аналогично тому, как это делалось при решении предыдущей задачи). Но поскольку он не сумел решить задачу, то, по всей видимости, я ответил ему «нет». Естественно, что этот ответ исключает из рассуждения вариант (3), и поэтому у нас остаются лишь варианты (1) и (2). Обратимся теперь к вопросу, который мне задал мой второй приятель. Если бы я ответил ему «да», то он сразу же сообразил бы, что единственной реальной возможностью решения задачи является вариант (2) (только этот вариант относится к случаю, когда обитательница острова бодрствует, в то время как варианты (1) и (3) могут иметь место лишь в случае, когда она спит). Поскольку второй приятель также не смог решить задачу, стало быть, я опять ответил ему «нет», а это сразу отбрасывает вариант (2). Итак, нам остается только вариант (I), который и имел место в действительности, — то есть, что жительница острова относилась к ночному типу и находилась ко сне. как она сама справедливо и полагала.

Подведем итоги: то, что мой первый приятель не сумел решить задачу, исключает из рассмотрения случай (3), а то, что ее не смог решить второй приятель, отбрасывает случай (2). Таким образом, нам остается только вариант (3), а именно что обитательница острова принадлежала к ночному типу и спала.

Эпилог. В начале этой главы я упоминал, будто бы весь этот остров мне приснился. Вместе с тем, если бы такого рода остров существовал на самом деле, то, значит, мне приснились бы истинные события. Поэтому, если бы я оказался одним из его обитателей, то меня следовало бы отнести к ночному типу.

7. Метаголоволомки

Последние две головоломки предыдущей главы (не считая эпилога) — образцы восхитительного класса задачек, которые мне хочется назвать метаголоволомками, или головоломками о головоломках. Например, нам предлагают головоломку без достаточного количества исходных данных, необходимых для ее решения, а потом сообщают, что кто-то еще либо смог, либо не смог решить эту задачу, воспользовавшись некоторой дополнительной информацией, но не всегда говорят, что же это была за информация. Суть, однако, в том, что мы все же получаем некую частичную информацию, которая в конце концов и позволяет нам найти решение задачи. Задачи этого жанра, к сожалению, редко встречаются в книгах. Ниже предлагаются пять таких головоломок — сначала совсем легкие, потом посложнее, а последняя венчает и эту главу, и предыдущие.

1. Дело Джона. Как-то раз шло судебное расследование по делу двух братьев-близнецов. Было известно, что по крайней мере один из них никогда не говорил правду, хотя и не ясно, кто же именно. Одного из братьев звали Джон — именно он и совершил преступление. (При этом вовсе не обязательно, чтобы Джон был тем из близнецов, который всегда лгал.) Цель расследования заключалась в том, чтобы выяснить, кого же из братьев зовут Джон.

— Вы — Джон? — спросил судья одного из близнецов.

— Да, я Джон, — последовал ответ.

— А вы — Джон? — спросил судья второго брата.

Второй близнец ему ответил вполне определенно (либо «да», либо «нет»), и тут судья сразу догадался, кто из них Джон.

Был Джон первым или вторым из близнецов?

2. Трансильванская метаголоволомка. Как мы уже знаем из гл. 4, все жители Трансильвании делятся на 4 типа:

1) люди в здравом уме;

2) люди, лишившиеся рассудка;

3) упыри, находящиеся в здравом уме;

4) упыри, лишившиеся рассудка.

Люди в здравом уме высказывают только истину (их утверждения всегда правильны и сами они честны). Люди, лишившиеся рассудка, всегда лгут (в силу собственных заблуждений, но отнюдь не умышленно). Упыри в здравом уме также всегда лгут (в силу своей природы, а не по заблуждению). Упыри, лишившиеся рассудка, всегда говорят правду (они убеждены в том, что их утверждения ложны, но умышленно лгут).

Так вот однажды три логика делились своими впечатлениями о поездках в Трансильванию, которые им пришлось в разное время совершить.

— Когда я там был, — сказал первый логик, — я встретил одного трансильванца, которого звали Айк. Я спросил его, является ли он человеком в здравом уме.

Айк мне ответил вполне определенно («да» или «нет»), но из его ответа я не сумел понять, к какому же типу он относится.

— Какое странное совпадение, — сказал второй логик я тоже повстречал этого самого Айка во время посещения острова. Я спросил его, является ли он упырем в здравом уме; он ответил мне вполне определенно («да» или «нет»), но я так и не смог сообразить, к какому типу он принадлежит.

— Какое совпадение! — воскликнул третий логик.

— Когда я был на острове, я тоже столкнулся с Айком и спросил его, является ли он упырем, лишившимся рассудка. Он тоже ответил мне вполне определенно («да» или «нет»), однако я, как и вы, не смог установить, кем же он был в действительности.

Находится ли Айк в здравом уме или он лишился рассудка? Человек он или упырь?

3. Метаголоволомка о рыцаре и плуте.

В моей уже упоминавшейся книге «Как же называется эта книга?» приведено множество увлекательных задач об острове, обитатели которого относятся либо к рыцарям, либо к плутам. При этом рыцари всегда говорят правду, а плуты всегда лгут. Вот еще одна задача о рыцарях и плутах, относящаяся к метаголоволомкам.

Один мудрец как-то раз посетил этот остров, где повстречал двух его жителей, А и В. Мудрец спросил А: «Вы оба рыцари?» А ответил ему «да» или «нет». Мудрец поразмышлял некоторое время, но потом понял, что у него не хватает сведений, чтобы определить, к какому же типу они относятся. Тогда мудрец задал А еще один вопрос: «Вы оба одного типа?» (Слова «одного типа» означают, что они либо оба рыцари, либо оба плуты.) А ответил «да» или «нет», и тут до мудреца сразу дошло, к какому типу относится каждый из островитян.

К какому типу принадлежат A и B?

4. Рыцари, плуты и нормальные люди.

На другом острове, где живут рыцари, плуты и нормальные люди, рыцари всегда говорят только правду, плуты всегда лгут, а люди, которых принято называть нормальными, в одних случаях лгут, а в других высказывают правду.

Однажды я посетил этот остров и встретил двух его обитателей, A и B. Еще раньше мне было известно, что один из них рыцарь, а другой — нормальный человек, однако я не знал, кто же именно. Я спросил A, является ли B нормальным человеком, на что A ответил мне вполне определенно. Тут я сразу понял, кем являются A и B.

Итак, кто же из этих двух обитателей острова нормальный человек?

6. Кто шпион?

Ну вот, мы и добрались до куда более хитрой метаголоволомки!

В одном суде проходило разбирательство по делу трех обвиняемых: A, B и C. К началу слушания удалось выяснить, что один из этой троицы был рыцарем (он всегда говорил только правду), другой — плутом (этот всегда лгал), а третий был шпионом, который оказался нормальным человеком (то есть иногда он лгал, а иногда говорил правду). Целью разбирательства было выявить среди них шпиона.

Поначалу слово предоставили обвиняемому A. Он то ли сообщил, что C — плут, то ли заявил, что C — шпион (точнее нам не известно). Потом предложили высказаться подсудимому B, который то ли утверждал, что A — рыцарь, то ли сказал, что A — плут, то ли заявил, что A — шпион, — точнее выяснить нам опять не удалось. Наконец, когда слово предоставили обвиняемому C, тот то ли сообщил, что B — рыцарь, то ли утверждал, что B — плут, то ли заявил, что B — шпион. Судья разобрался, кто же из них шпион, и вынес справедливый приговор.

Об этой истории как-то рассказали одному логику, который, поразмыслив, в конце концов заявил: «У меня недостаточно информации, чтобы выяснить, кто же из обвиняемых шпион». Тогда логику сообщили, что именно сказал A, после чего он вычислил, кто шпион.

Кто же из обвиняемых является шпионом — A, B или C?

Решения

1. Если бы второй близнец также ответил «да», то судья, очевидно, не смог бы узнать, кто из них Джон. Поэтому ясно, что второй близнец должен был ответить «нет». Это означает, что либо оба брата говорили правду, либо они оба лгали. Однако они не могли говорить правду одновременно, поскольку, согласно условию задачи, по крайней мере один из них всегда лжет. Следовательно, они оба лгали, и, значит, Джоном зовут второго близнеца. (При этом, правда, нельзя установить, кто же из братьев всегда лжет.)

2. Первый логик спросил Айка, является ли он человеком, находящимся в здравом уме. Если Айк действительно нормальный человек, то он ответил бы «да»; если же он сошел с ума, то он также ответил бы «да» (поскольку, будучи лишенным рассудка, он ошибочно полагал бы, будто он — человек, находящийся в здравом уме, и честно высказал бы свое мнение). Если Айк — находящийся в здравом уме упырь, то он также ответил бы «да» (поскольку, находясь в здравом уме, он сознает, что не является нормальным человеком, но солжет и все-таки скажет «да»). Если же Айк оказывается лишившимся рассудка упырем, то он определенно должен ответить «нет» (поскольку, будучи упырем, лишившимся рассудка, он уверен, будто является нормальным человеком, но высказывает ложные суждения). Итак, упырь, лишившийся рассудка, ответил бы на этот вопрос «нет», а трансильванцы остальных трех типов ответили бы «да». Поэтому, если бы Айк ответил «нет», первый логик сразу догадался бы, что Айк — лишившийся рассудка упырь. Однако первый логик не знал, кем является Айк, и, следовательно, он услышал утвердительный ответ. Таким образом, единственный вывод из сказанного — это то, что Айк не является лишившимся рассудка упырем.

Что касается вопроса второго логика: «Являетесь ли вы находящимся в здравом уме упырем?», то лишившийся рассудка человек ответил бы «да», а каждый из трех остальных типов ответил бы «нет». (Доказательство этого мы предоставляем читателю.) Но поскольку второй логик не смог понять из ответа Айка, кем же он был, то ответом на поставленный вопрос должно было быть «нет». Отсюда следует, что Айк не является человеком, лишившимся рассудка.

На вопрос третьего логика «Являетесь ли вы лишившимся рассудка упырем?» нормальный человек ответил бы «нет», а каждый их трех остальных типов ответил бы «да». Но поскольку третий логик так и не смог догадаться, кем же на самом деле был Айк, то, стало быть, он услышал положительный ответ. Отсюда можно сделать вывод, что Айк не является нормальным человеком.

Теперь, поскольку Айк не является ни лишившимся рассудка упырем, ни сошедшим с ума человеком, ни, наконец, человеком в здравом уме, то, следовательно, он должен быть находящимся в здравом уме упырем.

3. У нас имеется четыре возможных случая:

случай 1: А и В — оба рыцари;

случай 2: А — рыцарь, В — плут;

случай 3: А — плут, В — рыцарь;

случай 4: А и В — плуты.

Сначала мудрец спросил А, являются ли они оба рыцарями. При этом, если имеют место случаи 1, 3 и 4, то А должен ответить «да»; если же выполняется случай 2, то ответом А будет «нет». (Мы предоставляем читателю доказать это самостоятельно.) Поскольку мудрец все же выяснил из ответа А, что представляют собой данные жители острова, то, стало быть, А ответил «да». Тем самым из рассмотрения сразу исключается случай 2. Далее мудрец спросил А, относятся ли они оба к одному и тому же типу. В случаях 1 и 3 А ответил бы «да», а в случаях 2 и 4 он должен был ответить «нет». (Доказательство этого мы также оставляем читателю.) Итак, если бы мудрец услышал утвердительный ответ, он мог бы сделать единственный вывод — что имеет место либо случай 1, либо случай 3, но при этом он не знал бы, какой именно. Стало быть, он услышал в ответ «нет». Однако ранее он выяснил, что в такой ситуации должен выполняться либо случай 2, либо случай 4. Но поскольку случай 2 уже исключен нами из рассмотрения, то, следовательно, мудрец понял, что должен иметь место случай 4, то есть что А и В — плуты.

4. Если бы А ответил «да», то он либо мог оказаться рыцарем, либо был бы нормальным человеком (и при этом лгал), однако я никак не мог бы узнать, кем же именно. Если бы А ответил «нет», то он не мог бы оказаться рыцарем (поскольку в этом случае В был бы нормальным человеком, а сам А лгал). Поэтому А должен был быть нормальным человеком. Однако выяснить, кем же является А на самом деле, я мог лишь в одном случае — если бы А сказал «нет». Значит, А действительно нормальный человек. Мы, конечно, полагаем, что оба — и судья, и мудрец, которому предложили эту задачу, — обладали безупречными логическими способностями.

Итак, существуют две возможности: либо логику сказали, что А сообщил, будто С — плут, либо ему было сказано, что А заявил, будто С — шпион. Разберем обе эти возможности отдельно.

Возможность I: А сообщил, будто С — плут.

При этом у нас возникают три случая по отношению к тому, что сказал В, и мы должны исследовать каждый из них.

Случай 1: В утверждал, что А — рыцарь. Тогда:

1) если А — рыцарь, то С — плут (поскольку А сообщил, что С — плут) и, следовательно, В является шпионом;

2) если А — плут, то утверждение, высказанное В, является ложным, откуда сразу следует, что В должен быть шпионом (ведь он не плут, поскольку плутом является А) и, стало быть, С — рыцарь: 3) если А — шпион, то утверждение, высказанное В, вновь оказывается ложным, откуда следует, что В является плутом и, значит, С — рыцарь. Таким образом, мы получаем, что имеет место один из следующих вариантов:

(1) А — рыцарь, В — шпион, С — плут;

(2) А — плут, В — шпион, С — рыцарь;

(3) А — шпион, В — плут, С — рыцарь.

Далее, пусть С заявил, будто В — шпион. Тогда варианты (1) и (3) исключаются из рассмотрения. (Первый из них — потому что С, будучи плутом, никак не мог заявить, что В — шпион, поскольку В как раз им и является; второй — потому что С, будучи рыцарем, никак не мог утверждать, что В — шпион, поскольку В шпионом не является.) Значит, нам остается лишь вариант (2), причем в этой ситуации судья знал бы, что В — шпион

Пусть теперь С заявил, будто В — рыцарь. Тогда единственно возможным оказывается вариант (1), причем случае судье вновь было бы известно, кто шпион, и он признал бы виновным подсудимого В.

Пусть, наконец, С заявил, будто В — плут. Тогда судья не смог бы определить, какой из вариантов имеет место в действительности — вариант (1) или вариант (3). Поэтому он не смог бы указать, кто же является шпионом — А или В, а значит, и не смог бы признать кого-либо из них виновным. Следовательно, С не мог заявить, что В является плутом. (Конечно, у нас все еще действует предположение, относящееся к случаю 1, — что В утверждал, будто А — рыцарь.)

Итак, если имеет место случай 1, то судья мог признать виновным только подсудимого В.

Случай 2: В утверждал, что А — шпион. Предоставим читателю доказать самому, что в этом случае могут иметь место лишь следующие варианты:

(1) А — рыцарь, В — шпион, С — плут;

(2) А — плут, В — шпион, С — рыцарь;

(3) A — шпион, B — рыцарь, C — плут.

Если бы C заявил, будто B — шпион, тогда нам могут встретиться как вариант (2), так и вариант (3), так что в данной ситуации судья никак не сумел бы найти виновного. Если бы C заявил, будто B — рыцарь, то тогда может выполняться лишь вариант (1), и судья признал бы виновным подсудимого B. Если бы, наконец, C заявил, будто B — плут, тогда вполне могут иметь место как вариант (1), так и вариант (3), и судья опять не смог бы обнаружить виновного. Стало быть, C заявил, что B — рыцарь, а подсудимый B был признан виновным.

Итак, в случае 2 виновным оказывается вновь подсудимый B.

Случай 3: B утверждал, что A — плут. Тут у нас имеется 4 варианта (читатель может убедиться в этом сам):

(1) A — рыцарь, B — шпион, C — плут;

(2) A — плут, B — шпион, C — рыцарь;

(3) A — плут, B — рыцарь, C — шпион;

(4) A — шпион, B — плут, C — рыцарь.

Если бы C заявил, будто B — питон, тогда могут иметь место как вариант (2), так и вариант (3), и судья оказывается не в состоянии определить, кто же из подсудимых виновен. Если бы C заявил, будто B — рыцарь, тогда справедливыми могли бы оказаться как вариант (1), так и вариант (3), и судья вновь не смог бы обвинить кого-либо из. подсудимых в шпионаже. Наконец, если бы C заявил, будто B — плут, тогда могли бы выполняться варианты (1), (3) или (4), причем опять-таки судья не смог бы найти виновного.

Таким образом, мы полностью исключили из рассмотрения случай 3. Кроме того, теперь мы знаем, что в действительности могут иметь место либо случай 1, либо случай 2, причем в обоих этих случаях судья признал бы виновным подсудимого B.

Итак, при выполнении возможности I (если A сообщил, будто C — плут) шпионом должен оказаться обвиняемый B. Следовательно, если бы логику сказали о том, что A сообщил, будто C — плут, то он вполне мог бы решить задачу и установить, что подсудимый B является шпионом.

Возможность II. Предположим теперь, что логику было сказано, что A заявил, будто C — шпион. Покажем, что при этом логик оказался бы не в состоянии решить задачу, поскольку вполне могло случиться, что судья признал бы виновным A, или же могла возникнуть ситуация, когда виновным был бы признан B, причем логик никак не мог бы выяснить, какой из этих двух случаев имел место в действительности.

Для доказательства этого предположим, что A заявил, будто C —

шпион. Тогда существует вариант, при котором судья мог бы назвать виновным подсудимого А. В самом деле, допустим, что В утверждал, будто А — рыцарь, а С заявил, будто В — плут. Если А в самом деле является шпионом, то В может быть плутом (который лгал бы, утверждая, что А — рыцарь), а С может быть рыцарем (который говорил бы правду, заявляя, будто В — плут). При этом А (будучи по предположению шпионом) солгал бы, сообщив, будто С — шпион. Итак, вполне допустимо, чтобы А, В и С действительно высказали бы эти три утверждения, а также чтобы А оказался шпионом. Далее, если бы шпионом был В, то А должен был бы оказаться плутом, заявляя, будто С — шпион. Точно также должен был бы оказаться плутом и С, поскольку он заявил, будто В — плут; хотя, конечно же, это невозможно. Наконец, если бы шпионом был С, то тогда А должен был бы оказаться рыцарем, поскольку он говорил правду, утверждая, будто С — шпион. При этом рыцарем должен был бы оказаться и В, поскольку он тоже говорил правду, утверждая, будто А — рыцарь; однако это также невозможно. Значит, А должен быть шпионом (в случае если бы В утверждал, что А — рыцарь, а С заявил бы, будто В — плут).

Итак, существует вариант, когда виновным может быть признан именно А.

Теперь рассмотрим вариант, при котором судья назвал бы виновным подсудимого В. Допустим, что В утверждал, что А — рыцарь, а С заявил, будто В — шпион. (Напомню, что мы все еще придерживаемся предположения о том, что А заявил, будто С — шпион.) Если шпионом является А, то В оказывается плутом, утверждая, будто А — рыцарь. Кроме того, плутом должен оказаться и С, который утверждает, что В — шпион, хотя это, понятно, невозможно. Если шпионом является С, тогда А должен быть рыцарем (поскольку он заявляет, будто С — шпион). При этом рыцарем должен оказаться и В, который утверждает, что А — рыцарь, а это также невозможно. Вместе с тем, если шпионом оказывается В, то никакого противоречия не возникает (ведь А мог бы оказаться плутом, который заявил, будто С — шпион; С мог бы быть рыцарем, который заявил, что В — шпион, и, стало быть, В утверждал бы, что А — рыцарь). Итак, вполне допустимо, чтобы А, В и С действительно высказали бы три указанных утверждения, причем в этом случае судья назвал бы виновным подсудимого В.

Итак, я установил, что если А заявил, будто С — шпион, то вполне могло бы случиться, что судья признал виновным А, или же могла бы возникнуть ситуация, когда виновным был бы назван В, причем не существует никакой возможности выяснить, какой же из этих случаев имеет место на самом деле. Значит, если бы логику сказали, что A заявил, будто C — шпион, то логик никак не мог бы решим, задачу. Но поскольку нам известно, что он все-таки нашел решение, то, стало быть, ему сообщили, что A заявил, будто C — плут. Тогда (как мы уже убедились) судья мог назвать виновным только подсудимого B. Итак, B — шпион.

Часть третья. Тайна сейфа из Монте-Карло

8. Тайна сейфа из Монте-Карло

Последний раз мы оставили инспектора Крейга удобно расположившимся в вагоне поезда, который следовал из Трансильвании в Лондон. При мысли, что он скоро будет дома, у инспектора совсем отлегло от сердца. «Хватит возиться с упырями, — сказал он себе. — Наконец-то я возвращаюсь в Лондон к нормальной жизни».

Крейг и не подозревал, что перед возвращением домой его поджидало еще одно приключение — приключение совсем иного рода по сравнению с двумя последними. История эта, несомненно, должна привлечь тех читателей, которым нравятся головоломки, связанные с комбинаторикой. А произошло вот что.

По пути инспектор решил сделать остановку в Париже, чтобы управиться с кое-какими делами. Покончив с ними, он вновь поспешил на вокзал, где успел сесть на поезд, шедший из Парижа в Кале, с тем чтобы пересечь Ла-Манш и оказаться в Дувре. Но в тот самый момент, когда он ступил на перрон в Кале, к нему подошел чиновник из местного полицейского управления, который вручил ему срочную телеграмму из Монте-Карло. В телеграмме содержалась настоятельная просьба как можно скорее выехать туда, чтобы помочь в решении, как утверждалось в телеграмме, некой «важной проблемы». «О господи! — подумал Крейг. — Ведь так я никогда не доберусь до дома!»

Но поскольку долг есть долг, Крейг поменял свои планы и пересел на поезд, шедший и Монте-Карло. На вокзале в Монте-Карло его встретил один из служащих компании, по фамилии Мартинес, который немедленно повез инспектора в один из городских банков.

— У нас такое затруднение, — объяснял по дороге Мартинес. — Мы потеряли шифр к самому большому нашему сейфу, а взламывать его слишком накладно.

— Как же это могло случиться? — поинтересовался Крейг.

— Кодовая комбинация была написана на специальной карточке, которую один из служащих банка по неосторожности оставил внутри сейфа, когда закрывал его.

— Ну и ну! — удивился Крейг. — А что, больше никто не знает этот шифр?

— Ни одна живая душа, — удрученно вздохнул Мартинес. — Но самое ужасное заключается в том, что в случае, если будет использована неправильная комбинация цифр, то замок сейфа может совсем заклинить, тогда не останется никакого другого выхода, кроме как взорвать сейф, что, как я уже говорил, совершенно недопустимо — и не только потому, что будет выведен из строя дорогостоящий механизм замка, но и потому, что в самом сейфе хранится много исключительно ценных материалов, порой деликатного свойства.

— Погодите, — возразил Крейг. — А как могло случиться, что вы пользуетесь замком, который может навсегда испортиться из-за неверного набора шифра?

— Я очень возражал против установки этого замка, — ответил Мартинес. — Но совет директоров решил по-своему. Они заявили, будто бы механизм замка обладает настолько уникальными характеристиками, что они с лихвой компенсируют его недостаток, связанный с возможной порчей замка при наборе неправильной комбинации цифр.

— Вот уж действительно самая нелепая ситуация, с которой я когда-либо сталкивался, — заметил Крейг.

— Совершенно с вами согласен, инспектор, — воскликнул Мартинес. — Однако что же нам теперь делать?

— Честно говоря, пока мне в голову ничего не приходит, — отвечал Крейг. — По-видимому, я не смогу быть ничем вам полезен, поскольку не вижу здесь ничего такого, за что можно было бы зацепиться. Боюсь, вы пригласили меня напрасно.

— Как это, не за что зацепиться! — обрадовался Мартинес. — Если бы это было так, я бы никогда не осмелился пригласить вас.

— Вот как? — заинтересовался Крейг.

— Да-да, — начал свой рассказ Мартинес. — Не так давно в нашем банке работал очень интересный, хотя и несколько эксцентричный сотрудник. Он был по профессии математиком; особенно его занимали задачи, связанные с комбинаторикой. Страшно интересовался он и всякими секретными замками с шифрами — поверите ли, механизм нашего сейфа он мог изучать прямо часами. Так вот, он утверждал, будто бы замок нашего сейфа — самый необычный и самый хитроумный из всех, с которыми он когда-либо имел дело. Кроме того, он постоянно придумывал всякие головоломки, развлекая ими многих из нас. Так, однажды он написал статейку, где перечислялись некоторые свойства механизма замка; при этом он утверждал, что, зная эти свойства, мы сможем сами легко получить ту самую комбинацию цифр, с помощью которой открывается наш сейф. Он вручил нам свою рукопись в качестве забавной головоломки, чтобы было чем заняться на досуге, но задачка эта показалась многим моим коллегам слишком трудной, и вскоре все о ней забыли.

— И где же эта статья? — спросил Крейг. — Полагаю, ее не заперли в сейфе вместе с карточкой, на которой записан шифр?

— По счастью, нет, — сказал Мартинес, вытаскивая рукопись из ящика своего письменного стола. — Вот, я сохранил ее.

Инспектор Крейг внимательно просмотрел рукопись.

— Понятно, почему никто из вас не сумел решить эту головоломку. Судя по всему, она и в самом деле необычайно сложна! А не проще ли было бы в этом случае обратиться прямо к автору задачи, ведь он-то, конечно, вспомнит шифр или в крайнем случае сумеет восстановить его заново?

— Этот человек работал у нас под именем Мартина Фаркуса, но, мне кажется, это было вымышленное имя, — ответил Мартинес. — Позднее мы так и не смогли его разыскать.

— Да-а, — задумчиво произнес Крейг. — Тогда, я полагаю, существует только один выход — попытаться разгадать головоломку, даже если на это может потребоваться несколько недель или месяцев.

— Тут есть еще одна сложность, о которой я вам не сообщил, — перебил Мартинес. — Мы непременно должны открыть сейф к первому июня нынешнего года. Дело в том, что в сейфе хранятся важные государственные документы, которые должны быть извлечены утром второго июня. Если до той поры нам не удастся раздобыть шифр, то придется взорвать сейф, несмотря на его стоимость. Правда, сами документы при этом не будут повреждены взрывом, поскольку они находятся в сверхпрочном внутреннем сейфе, расположенном достаточно далеко от входной двери наружного сейфа. Что же касается других хранящихся там ценностей — ну что ж, документы важнее всего! Правда, нам это влетит в копеечку, если все-таки придется прибегнуть к столь радикальному способу!

— Попробую что-нибудь придумать, — сказал Крейг, подымаясь. — Пока ничего не обещаю, но сделаю все, что смогу.

А теперь попробуем рассказать, что же было в рукописи Фаркуса. Прежде всего отметим, что во всех шифрах использовались не цифры, а буквы. Поэтому шифром, или комбинацией, мы будем называть произвольную последовательность букв, составленную из любых двадцати шести прописных букв английского алфавита. Такая последовательность может быть любой длины и включать в себя произвольное число букв, повторяющихся любое число раз. Например, комбинация *BABXL* представляет собой шифр, комбинация *XEGGEXY* также является шифром.

Отдельная буква тоже может считаться комбинацией (комбинацией единичной длины). При этом одни комбинации букв (шифры) будут открывать замок, другие могут его полностью заблокировать, а третьи не будут оказывать на механизм замка никакого действия. Комбинации, не оказывающие на замок никакого действия, мы будем называть нейтральными. Далее мы будем использовать строчные буквы *x* и *y* для обозначения произвольных комбинаций, причем символ *xy* будет обозначать собой комбинацию *x*, за которой следует комбинация *y*. Так, если *x* представляет собой комбинацию *GAQ*, а *y* — комбинацию *DZBF*, то *xy* будет обозначать комбинацию *GAQDZBF. Обращением, или обратной комбинацией,* мы будем называть ту же комбинацию, но записанную в обратном порядке. Например, обращением комбинации *BQFR* является комбинация *RFQB. Повторением xx* комбинации *x* назовем комбинацию *x*, за которой вновь следует она сама; так, например, повторение комбинации *BQFR* есть *BQFRBQFR*.

Далее Фаркус (или как там его звали по-настоящему) вводит так называемые родственные по отношению к другим (или, быть может, по отношению к самим себе) комбинации, однако, к сожалению, нигде не оговаривает, что же скрывается под вводимым им понятием. Тем не менее он перечисляет несколько характерных свойств этого «родства» (что бы там под этим ни понималось), которые, по его мнению, позволяют достаточно искушенному человеку легко открыть замок! Он перечисляет следующие 5 основных свойств (которые, как он отмечает, выполняются для двух любых произвольных комбинаций *x* и *y*):

Свойство *Q*. Для любой комбинации *x* комбинация *QxQ* является родственной по отношению к *x*. (Например, комбинация *QCFRQ* является родственной комбинации *CFR*.)

Свойство *L*. Если комбинация *x* родственна *y*, то комбинация *Lx* родственна комбинации *Qy*. (Например, поскольку комбинация *QCFRQ* родственна по отношению к *CFR*, то, значит, комбинация *LQCFRQ* является родственной по отношению к комбинации *QCFR*.)

Свойство *V*, или свойство обращения. Если комбинация *x* родственна по отношению к комбинации *y*, тогда комбинация *Vx* родственна обращению комбинации *y* (обратной комбинации *y*). (Например, поскольку комбинация *QCFRQ* родственна по отношению к комбинации *CFR*, то, следовательно, комбинация *VQCFRQ* будет родственной по отношению к *RFC*.)

Свойство *R*, или свойство повторения. Если комбинация *x* родственна по отношению к комбинации *y*, то комбинация *Rx* будет родственна комбинации *yy* (повторению комбинации *y*). (Например, поскольку комбинация *QCFRQ* родственна по отношению к комбинации *CFR*, то комбинация *RQCFRQ* будет родственной по отношению к комбинации *CFRCFR*. Кроме того, как мы видели на примере, приведенном в свойстве *V*, комбинация *VQCFRQ* является родственной по отношению к *RFC*, и, стало быть, комбинация *RVQCFRQ* будет родственной комбинации *RFCRFC*.)

Свойство *Sp*. Пусть комбинация *x* родственна по отношению к комбинации *y*, тогда, если комбинация *x* блокирует замок, то комбинация *y* будет нейтральной; если же комбинация *x* является нейтральной, то комбинация *y* блокирует замок. (Например, мы убедились, что комбинация *RVQCFRQ* является родственной по отношению к комбинации *RFCRFC*. Следовательно, если комбинация *RVQCFRQ* будет блокировать замок, то комбинация *RFCRFC* не будет оказывать на механизм замка никакого действия, а если комбинация *LVQCRFQ* никакого действия на механизм замка не оказывает, то есть она является нейтральной, тогда комбинация *RFCRFC* блокирует замок.)

С помощью этих пяти условий действительно можно подобрать комбинацию, которая открывала бы замок. (Самая короткая комбинация, которая мне известна, имеет длину, равную 10, но, конечно, существуют и различные другие комбинации.)

Разумеется, вряд ли можно ожидать, что теперь читатель сразу же отыщет решение поставленной задачи; ведь с описанием работы этого механизма связана целая теория, к последовательному изложению которой мы перейдем в дальнейшем. Теория эта имеет отношение к некоторым очень интересным открытиям в области математики и теоретической логики.

По правде говоря, после встречи с Мартинесом Крейг несколько дней бился над головоломкой, однако безуспешно.

— Оставаться здесь дальше не имеет смысла, — решил Крейг. — У меня нет ни малейшего представления, сколько времени эта работа может у меня занять, полагаю, что вполне могу подумать над этим дома.

Итак, инспектор Крейг возвратился в Лондон. То, что загадка в конце концов была решена, произошло не столько благодаря усилиям Крейга и его друзей (с ними мы вскоре познакомимся), но и в силу удивительного стечения обстоятельств, которые вот-вот раскроются перед нами.

9. Удивительная числовая машина

После того как инспектор Крейг возвратился в Лондон, он поначалу потратил массу времени, пытаясь разгадать загадку сейфа из Монте-Карло, но потом, так ничего и не добившись, счел за благо на некоторое время отложить злополучную задачу в сторону и немножко развеяться. Тут ему пришла в голову мысль навестить своего старого приятеля Нормана Мак-Каллоха, которого он не встречал уже несколько лет. Они подружились, еще будучи студентами Оксфордского университета, и Крейг всегда с большой теплотой вспоминал те дни и своего друга — отличного парня, правда, немного чудаковатого, который постоянно выдумывал всякого рода технические курьезы. И хотя наш рассказ относится ко времени, когда современные ЭВМ еще не были изобретены, Мак-Каллоху уже в ту пору удалось сконструировать нечто вроде механического счетно-решающего устройства, но, конечно, по нынешним меркам, весьма примитивного.

— В свое время я здорово развлекался с этой штукой, — объяснил приятелю Мак-Каллох. — Правда, никак не могу придумать, к чему бы полезному ее приспособить, но зато она обладает всякими занятными свойствами.

— Что же она умеет делать? — поинтересовался Крейг.

— А вот что, — бодро начал Мак-Каллох. — Ты вводишь в машину заданное число, а через некоторое время она сама выдает тебе число.

— То же самое число или какое-нибудь другое? — спросил Крейг.

— Это зависит от того, какое число в нее ввести.

— Понятно, — почесал в затылке Крейг.

— Кроме того, — продолжал Мак-Каллох, — моя машина воспринимает не все числа, а лишь некоторые из них. Поэтому те числа, которые ее устраивают, я буду называть допустимыми числами.

— Вся эта терминология звучит весьма логичной, — согласился Крейг, — но позволь мне узнать, какие числа для машины являются допустимыми, а какие нет. Имеется ли какое-нибудь правило на этот счет? И еще: существует ли определенное правило относительно того, какое же число выдает машина, если только ты решил, какое именно допустимое число в нее ввести?

— Дело тут не совсем так, — пояснил Мак-Каллох. — Решить ввести число еще недостаточно, надо действительно его ввести.

— Это понятно, — поправился Крейг. — Я лишь хотел спросить, известно ли заранее, какое число выдаст твоя машина, если в нее уже введено исходное число?

— Ну, конечно, — ответил Мак-Каллох. — Моя машина — это ведь не устройство для получения случайных чисел! Она действует по строго определенным законам. А теперь я объясню тебе правила ее работы, — продолжал Мак-Каллох. — Прежде всего под числом я понимаю произвольное целое положительное число; ведь моя нынешняя машина не умеет оперировать с отрицательными величинами и с дробями. Заданное число N при этом записывается обычным способом в виде некоторой последовательности цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вместе с тем моя машина может манипулировать только с числами, в которых нет нуля, например с числами вида 23 или 5492, но никак не с числами вида 502 или 3250607. Кроме того, если нам даны два числа N и M, то под NM мы понимаем вовсе не N, умноженное на M! Символом NM обозначается число, полученное следующим образом: вначале записываются цифры числа N, причем в том же порядке, в каком они следуют в N, а потом к ним последовательно приписываются цифры числа M. Так, например, если N равно 23, а M равно 728, то символом NM мы будем обозначать число 23728. Или же если N = *4*, а M = *39*, то под NM мы будем понимать число 439.

— Вот уж совершенно необычная операция с числами! — удивился Крейг.

— Ты прав, — согласился Мак-Каллох. — Но именно эту операцию машина понимает лучше всего. А теперь я объясню тебе некоторые правила ее работы. Кстати, мы говорим, что число X порождает число Y, имея в виду, что X является допустимым числом и что если число X вводится в машину, то Y есть то число, которое оно выдает. Так вот, первое правило таково:

Правило 1. Для любого числа X число $2X$ (то есть 2, за которым следует X, а не 2, умноженное на X!) является допустимым числом, причем число $2X$ порождает число X. Например, число 253 порождает число 53, 27482 порождает 7482, 23985 порождает 3985 и т. д. Иными словами, если я ввожу в машину число $2X$, то она отбрасывает двойку в начале и выдает нам то, что остается, а именно — число X.

— Ну, это совсем просто, — заметил Крейг. — А каковы остальные правила?

— Машина использует только два правила, — продолжал Мак-Каллох. — Но сначала я хотел бы разъяснить еще кое-что. Так, для любого числа X исключительно важную роль играет число $X2X$; это число я называю *ассоциатом* числа X. Например, ассоциатом числа 7 является 727, а ассоциатом числа 594 будет 5942594. А теперь другое правило:

Правило 2. Для любых чисел *X* и *Y* справедливо следующее утверждение: если число *X* порождает число *Y*, то число 3*X* порождает ассоциат числа *Y*.

Например, согласно правилу 1, число 27 порождает 7; следовательно, число 327 порождает ассоциат числа 7, то есть число 727. Точно так же 2586 порождает 586; поэтому 32586 порождает ассоциат числа 586, то есть 5862586.

В этот момент Мак-Каллох ввел в машину число 32586. После неимоверного скрежета и лязга машина, в конце концов, действительно выдала число 5862586.

— Вообще-то ее нужно чуточку смазать, — заметил Мак-Каллох. — А пока давай рассмотрим еще пару примеров, чтобы выяснить, насколько ты усвоил оба моих правила. Допустим, я ввожу в машину число 3327. Что она нам выдаст? Мы уже знаем, что число 327 порождает число 727, а число 3327 порождает ассоциат числа 727, то есть число 7272727. Какое же число порождается числом 33327? Так вот, если 3327 порождает 7272727 (как мы только что убедились), то 33327 должно порождать ассоциат числа 7272727, то есть 727272727272727. Еще один пример: 259 порождает 59, 3259 порождает 59259, 33259 порождает 59259259259, и, наконец, 333259 порождает 5925925925925925925925925259.

— Это понятно, — согласился Крейг. — Но пока единственные числа, которыми ты пользовался до сих пор и которые, по всей видимости, действительно что-то «порождают», — это числа, начинающиеся с цифры 2 или 3. А как быть с числами, которые начинаются, скажем, с четверки?

— Видишь ли, моя машина действительно воспринимает только числа, начинающиеся с цифры 2 или 3, но даже среди них не все числа оказываются допустимыми. Когда-нибудь я построю машину побольше, чтобы она могла воспринимать большее количество чисел.

— А какие числа, начинающиеся с цифры 2 или 3, оказываются неприемлемыми для твоей машины? — спросил Крейг.

— Ну, например, не является допустимым число 2, поскольку оно не попадает под действие ни правила 1, ни правила 2; однако любое многоразрядное число, начинающееся с цифры 2, является допустимым. Не будет, например, допустимым число, состоящее из одних только троек. Кроме того, не являются допустимыми числа вида 32, 332 или числа, задаваемые в виде произвольной цепочки троек, за которыми следует цифра 2. В то же время для любого числа X допустимыми будут числа 2*X*, 32*X*, 332*X* и т. д. Короче говоря, допустимыми числами являются только числа вида $2X$, $32X$, $332X$, $3332X$, а также любая цепочка троек, за которыми следуют цифры $2X$. Далее, поскольку число $2X$ порождает X, а число $32X$ порождает ассоциат числа X, то число $332X$ в свою очередь порождает ассоциат ассоциата числа X — число, которое логично называть двойным ассоциатом числа X, а соответственно число $3332X$ будет давать нам ассоциат ассоциата числа X — это число будем называть тройным ассоциатом числа X — и т. д.

— Вот теперь я понял все до конца, — удовлетворенно заметил Крейг. — Правда, мне бы хотелось еще узнать, о каких это забавных свойствах твоей машины ты упоминал?

— Тут-то мы как раз и приходим к различного рода комбинаторным головоломкам, — пояснил Мак-Каллох. — О некоторых из них я и хочу тебе рассказать!

1. — Начнем с самого простого примера, — сказал Мак-Каллох. — Пусть имеется число N, которое порождает само себя; значит, когда ты вводишь его в машину, она выдает тебе то же самое число N. Не мог бы ты найти такое число?

2. — Прекрасно, — одобрил Мак-Каллох, когда Крейг показал ему свое решение. — А теперь еще об одной интересной особенности этой машины. Пусть имеется число N, которое порождает ассоциат самого себя; другими словами, если ты вводишь в машину число N, то она выдает тебе число $N2N$. Не сможешь ли ты отыскать это число?

Эта задача показалась Крейгу несколько труднее предыдущей, но в конце концов он справился и с ней. А вы сумеете ее решить?

3. — Превосходно, — сказал Мак-Каллох, взглянув на решение Крейга. — Единственно, что хотелось бы мне знать, — это каким путем ты шел, чтобы найти исходное число N: так сказать, методом «тыка» или же ты действовал по заранее намеченному плану? И кроме того, является ли найденное тобой N единственно возможным числом, порождающим ассоциат самого себя, или же существуют и другие такие числа?

Тогда Крейг рассказал о своем методе отыскания числа N в последней задаче, а также ответил на вопрос Мак-Каллоха о том, существуют ли другие возможные решения этой задачи. Скорее всего, ход суждений Крейга должен заинтересовать читателя; более того, он существенно облегчает нахождение решений нескольких задач этой главы.

4. — Кстати, по поводу моего последнего вопроса, — сказал Мак-Каллох. — Как ты решил первую задачу? Существуют ли еще какие-нибудь числа, которые порождают сами себя?

Ответ Крейга приведен в решениях.

5. — Далее, — продолжал Мак-Каллох, — имеется число N, которое порождает число $7N$ (то есть за семеркой следует N). Мог бы ты его найти?

6. — Рассмотрим еще один вопрос, — сказал Мак-Каллох. — Существует ли такое число N, чтобы число $3N$ порождало ассоциат самого числа N?

7. — А существует ли такое N, — спросил Мак-Каллох, — которое порождает ассоциат числа $3N$?

8. — Пожалуй, самая интересная особенность моей машины заключается в том, — сказал Мак-Каллох, — что для любого числа A существует некое число Y, которое порождает число AY. Как доказать это утверждение, и как по заданному числу A найти такое число Y?

Примечание. Этот принцип, и в самом деле очень простой, на практике оказывается еще более важным, нежели предполагал в тот момент Мак-Каллох! В этой книге мы столкнемся с ним еще не раз, и поэтому в дальнейшем будем называть его законом Мак-Каллоха.

9. — Далее, — продолжал Мак-Каллох, — всегда ли для сданного числа A существует некое число Y, которое порождает ассоциат числа AY? Существует ли, например, число, которое порождает ассоциат числа $56Y$, и если это так, то что это за число?

10. — Еще один интересный факт, — сказал Мак-Каллох, — заключается в том, что существует некоторое число N, которое порождает двойной ассоциат самого себя. Можешь ли ты найти это число?

11. — Кроме того, — сказал Мак-Каллох, — для любого заданного числа A существует число X, которое порождает двойной ассоциат числа AX. Не мог бы ты сообразить, как найти такое число X, если число A нам задано? К примеру, как найти число X, которое порождает двойной ассоциат числа $78X$?

А вот еще несколько задач, с которыми Мак-Каллох познакомил в тот день Крейга. (За исключением последних, эти задачи не имеют особого теоретического значения, однако читателю, может быть, доставит удовольствие повозиться с ними)

12. Найти число *N*, такое, чтобы число 3*N* порождало число 3*N*.

13. Найти число *N*, такое, чтобы число 3*N* порождало число 2*N*.

14. Найти число *N*, такое, чтобы число 3*N* порождало число 32*N*.

15. Существует ли такое число *N*, для которого числа *NNN*2 и 3*N*2 порождали бы одно и то же число?

16. Существует ли такое число *N*, ассоциат которого порождал бы число *NN*? Существует ли несколько таких чисел *N*?

17. Существует ли такое число *N*, для которого число *NN* порождало бы ассоциат этого *N*?

18. Найти число *N*, такое, чтобы ассоциат числа *N* порождал двойной ассоциат *N*.

19. Найти число *N*, которое порождает число *N*23.

20. Один отрицательный результат.

— Знаешь, — сказал Мак-Каллох, — я довольно долго пытался найти число *N*, которое порождает число *N*2, однако до сих пор все мои попытки не увенчались успехом. Интересно бы узнать, такое число на самом деле не существует или же у меня просто не хватает сообразительности, чтобы его отыскать?

Эта задача сразу завладела вниманием Крейга. Он тут же вытащил записную книжку и карандаш и погрузился в размышления. Спустя некоторое время он сказал:

— Не трать понапрасну силы, такое число просто не может существовать.

Как Крейг догадался об этом?

Решения

1. Таким числом является, например, число 323. В самом деле, поскольку число 23 порождает число 3 (согласно правилу 1), то, согласно правилу 2, число 323 должно порождать ассоциат числа 3, а это и есть 323 — как раз то же самое число!

Существуют ли другие такие числа?

По поводу ответа Крейга на этот вопрос смотри решение задачи 4.

2. Числом, которое нашел Крейг, было 33233. Действительно, любое число вида 332*X* порождает двойной ассоциат *X;* так, число 33233 порождает двойной ассоциат числа 33 — то есть ассоциат ассоциата числа 33. Далее, ассоциат числа 33 есть исходное число 11233, и, следовательно, двойной ассоциат числа 33 есть ассоциат числа 33233. Итак, число 33233 порождают ассоциат числа 33233, или свой собственный ассоциат.

Как же было найдено это число, и является ли полученное решение единственным? Крейг дает ответы на эти вопросы при решении следующей задачи.

3. Здесь рассказывается о том, как Крейг отыскал решение задачи 2, а также о том, как он сумел ответить на вопрос, существуют ли какие-либо другие решения этой задачи. Тут я предоставлю слово ему самому:

«Моя задача заключалась в том, чтобы найти число *N*, которое порождает число *N*2*N*. Ясно, что это число должно иметь вид 2*X*, 32*X*, 332*X*, 3332*X* и т. д., причем мне нужно было отыскать *X*. Подошло бы в данном случае число вида 2*X*? Совершенно очевидно, что нет, поскольку число 2*X* порождает число *X*, которое, понятно, является более коротким (содержит меньше цифр), чем ассоциат числа 2*X*. Поэтому ни одно число вида 2*X* никак не могло оказаться подходящим.

Что можно сказать по поводу числа вида 32*X*? Оно также порождает ассоциат числа *X*, который, очевидно, содержит меньшее число цифр, нежели ассоциат числа 32*X*.

Теперь попробуем число вида 332*X*. Это число порождает двойной ассоциат числа *X*, который имеет вид X2*X*2*X*2*X*, тогда как нам необходимо получить ассоциат числа 332*X*, то есть число, которое записывается в форме 332*X*2332*X*. Далее, может ли число X2*X*2*X*2*X* оказаться тем же самым числом, что и 332*X*2332*X*? Прежде всего, нужно сравнить относительную длину этих чисел. Так, если *h* — количество цифр в числе

X, то число Х2X2X2X должно иметь 4h + 3 цифр (поскольку в нем четыре Х и три двойки); в то же время число 332X2332X имеет 2h +7 цифр. Может ли 4h + 3 равняться 2h + 7? Да, но только в том случае, когда h = 2. Итак, что касается длины, то число вида 332X вполне может оказаться для нас подходящим, но лишь при условии, если количество цифр в X равняется двум.

Существуют ли еще какие-нибудь возможности? Посмотрим, например, что можно сказать по поводу числа вида 332X. Такое число порождает тройной ассоциат числа X, который представляет собой число вида Х2X2X2X2X2X2X2X, тогда как нам необходимо получить ассоциат числа 3332X, который записывается как 3332X23332X. Могут ли эти числа оказаться одинаковыми? Вновь обозначая через h длину числа X, находим, что число Х2X2X2X2X2X2X2X имеет 8h + 7 цифр; в то же время число 3332X23332X имеет 2h + 9 цифр. Равенство 8h + 7 = 2h + 9 может выполняться, только если h = 1/3, и, следовательно, в данном случае целочисленного значения не существует. Итак, числа вида 3332X нам также не подходят.

Наконец, что можно сказать относительно числа вида 33332X? С одной стороны, это число порождает четверной ассоциат числа X, который имеет длину 16h + 15; с другой стороны, сам ассоциат числа X имеет длину 2h + 11. Ясно, что для любого целого положительного h выражение 16h + 15 больше, чем 2h + 11, и, значит, число вида 33332X порождает нечто слишком для нас большое.

Если мы теперь возьмем число, начинающееся не с 4, а с 5 троек, то несоответствие между длиной числа, которое оно вроде бы должно было порождать, и длиной числа, которое оно порождает на самом деле, окажется еще больше, а если мы возьмем число, начинающееся с 6 или более троек, то это несоответствие станет совсем большим. Таким образом, нам остается снова вернуться к числу 332X как к единственно возможному решению задачи, причем X в этом случае должен быть числом, состоящим из 2 цифр. Итак, искомое число N должно иметь вид 332ab, где a и b — одиночные цифры, подлежащие определению.

Ясно, что число 332ab порождает двойной ассоциат числа ab, или число ab2ab2ab2ab. При этом необходимо, чтобы число 332ab порождало ассоциат числа 332ab, который записывается как 332ab2332ab. Могут ли эти два числа оказаться одинаковыми? Для ответа на этот вопрос попробуем сравнить их на соответствие цифр:

ab2ab2ab2ab

332ab2332ab.

Сравнивая первые цифры каждого числа, мы видим, что a обязательно должно быть тройкой. Сравнение вторых цифр дает нам, что b также должно оказаться двойкой. Итак, число N = 33233 является решением нашей задачи и притом единственным».

4. — По правде говоря, — признался Крейг, — первую задачу я решал почти интуитивно; чтобы найти число 323, я не пользовался никаким специальным методом. К тому же я пока не успел обдумать вопрос, существует ли какое-либо иное число, которое порождало бы само себя.

— Однако, как мне кажется, ответы на эти вопросы не потребуют слишком много усилий. В самом деле, попробуем, к примеру, выяснить, не могло бы нам подойти какое-нибудь число вида $332X$. Такое число должно было бы порождать двойной ассоциат числа X, который представляет собой число вида $X2X2X2X$ и имеет длину $4h + 3$, где h — длина числа X. С другой стороны, нам необходимо взять такое число, чтобы оно порождало число $332X$, которое в свою очередь имеет длину $h + 3$? Вполне очевидно, что при любых положительных h величина $4h + 3$ всегда больше, чем $h + 3$, и потому число $332X$ будет порождать число, в котором окажется слишком много цифр. То же самое можно сказать, по поводу числа вида $3332X$, а также чисел, начинающихся с четырех и более троек, для них соответствующие расхождения по длине окажутся еще большими. Значит, единственной возможностью для нас остается число вида $32X$ (очевидно, что число вида $2X$ нам также не годится, поскольку оно не может порождать само себя — ведь оно порождает число X). Далее, число $32X$ порождает число $X2X$, и, кроме того, требуется, чтобы оно порождало само себя, то есть опять $32X$. Поэтому числа $32X$ и $X2X$ должны совпадать. Обозначим через h длину числа X, тогда число $32X$ имеет длину $h + 2$, а число $X2X$ — длину $2h + 1$. При этом должно выполняться условие $2h + 1 = h + 2$, откуда сразу следует, что h равно 1. Стало быть, число X состоит из одной-единственной цифры. Наконец, для какой цифры a имеет место условие $a2a = 32a$? Ясно, что a в этом случае должно быть тройкой. Итак, число 323 является единственным решением данной задачи.

5. Возьмем в качестве N число 3273. Это число порождает ассоциат числа 73, то есть число 73273, которое в свою очередь можно представить как $7N$. Итак, число 73273 есть решение нашей задачи. (Кроме того, это решение — единственное, что легко можно показать с помощью сравнительного анализа соответствующих длин, подробно обсуждавшегося в последних двух задачах.)

6. Поскольку число 323 порождает само себя, то число 3323 должно порождать ассоциат числа 323. Итак, если положить $N = 323$, тогда число $3N$ действительно порождает ассоциат числи N. (Это решение является единственным.)

7. Решением будет число 332333. Проверка: положим N равным этому числу. Тогда оно порождает двойной ассоциат числа 333, который в свою очередь является ассоциатом числа 3332333 — или, иными словами, ассоциатом числа $3N$.

8. Очевидно, что эта задача представляет собой прямое обобщение задачи 5. Там мы видели, что при $N = 3273$ число N порождает число $7N$. Цифра 7 не играет в данном случае никакой особой роли. Действительно, для любого числа A справедливо условие: если мы положим $Y = 32A3$, то число Y будет порождать число AY (поскольку оно порождает ассоциат числа $A3$, который записывается как $A32A3$ и который в свою очередь представляет собой число AY). Итак, например, если мы хотим найти число Y, которое порождало бы число $837Y$, то мы должны выбрать Y равным 328373.

Указанный факт, как выяснится ниже, имеет важное теоретическое значение!

9. Ответом на поставленный вопрос будет «да». Возьмем в качестве Y число $332A33$. Это число порождает двойной ассоциат числа $A33$, который в свою очередь является ассоциатом числа $A332A33$. Но число $A332A33$ и есть AY; следовательно, число Y порождает ассоциат числа AY.

Для частного примера, предложенного Мак-Каллохом (найти число Y, которое порождало бы ассоциат числа $56Y$), решением будет число $Y = 3325633$.

10. Решением является число 3332333. Оно порождает тройной ассоциат числа 333, который является двойным ассоциатом ассоциата числа 333. При этом ассоциат числа 333 есть число 3332333, и, стало быть, число 3332333 порождает двойной ассоциат числа 3332333.

Заметим общую систему: число 323 порождает само себя, число 33233 порождает свой ассоциат, число 332333 порождает двойной ассоциат самого себя. Далее, число 333323333 порождает свой тройной ассоциат, число 33333233333 порождает четверной ассоциат самого себя и т. д. (Во всем этом читатель вполне может убедиться сам.)

11. Решением является X = 3332333. Это число порождает тройной ассоциат числа A333, который является двойным ассоциатом ассоциата числа A333. При этом ассоциатом числа A333 оказывается число A3332A333, которое в свою очередь и есть AX. Итак, число X порождает двойной ассоциат числа AX.

В частном случае, когда A = 78, решением будет число 333278333.

12. Очевидно, что ответом будет N = 23. (Ведь мы уже знаем, что число 323 порождает само себя, поэтому, положив N = 23, мы действительно имеем, что число 3N порождает число 3N.)

13. Ответ: N = 22.

14. Ответ: N = 232.

15. Конечно, N = 2.

16. В этом случае вполне подойдет любая цепочка двоек.

17. Да; например, N = 32.

18. Положить N = 33.

19. Положить N = 32323.

20. Как читатель легко может удостовериться сам, любое число, начинающееся с двух или более троек, будет порождать число большей длины, нежели число N2. (Например, если N — число вида 332X, и h — длина числа X, то само число N будет порождать двойной ассоциат числа X, который имеет длину 4h + 3, в то время как само число N2 имеет длину h + 4). Точно так же нам никак не подойдет ни одно число N вида 2X, поскольку если и существует некое число N, которое порождает число N2, то оно обязательно должно быть вида 32X. Далее, число 32X порождает число X2X, тогда как нам требуется получить число 32X2. Если X2X представляет собой то же самое число, что и 32X2, то, обозначая, как обычно, через h длину числа X, мы должны прийти к условию 2h + 1 = h + 3, откуда следует, что h = 2. Итак, единственным числом, которое могло бы нас устроить (если, конечно, таковые существуют), должно быть число вида 32*ab*, где *a* и *b* — одиночные цифры, подлежащие определению ниже. Далее, число 32*ab* порождает число *ab*2*ab*, тогда как нам нужно получить число 32*ab*2. Итак, могут ли числа *ab*2*ab* и 32*ab*2 оказаться одним и тем же числом? Попробуем сравнить их цифру за цифрой:

*ab*2*ab*

32*ab*2.

Сравнивая первые цифры, мы получаем, что $a = 3$; из сравнения же третьих цифр имеем, что $a = 2$. Полученное противоречие доказывает, что наша задача неразрешима. Итак, не существует такого числа *N*, которое порождало бы число *N*2!

10. Принцип Крейга

Спустя две недели Крейг снова навестил Мак-Каллоха.

— Слыхал, что ты построил новый вариант своей машины, — сказал Крейг. — Наши общие друзья рассказывали мне, будто твоя новая машина способна проделывать какие-то удивительные вещи. Это правда?

— Совершенно верно, — ответил Мак-Каллох не без гордости. — Моя новая машина, как и раньше, работает в соответствии с правилами 1 и 2, и, кроме того, в нее введены два новых правила. Однако я только что заварил свежего чая — давай выпьем по чашечке, прежде чем я познакомлю тебя с новыми правилами.

После отличного чая с восхитительными сдобными булочками Мак-Каллох приступил к делу:

— Под обращением некоторого числа я понимаю число, цифры которого записаны в обратном порядке; например, обращение числа 5934 есть число 4395. Вот первое из моих новых правил.

Правило 3. Для любых чисел *X* и *Y* справедливо следующее: если число *X* порождает число *Y*, то число 4*X* порождает обращение числа *Y*.

— Позволь мне проиллюстрировать это правило таким примером, — продолжал Мак-Каллох. — Выбери какое-нибудь произвольное число *Y*.

— Согласен, — сказал Крейг. — Допустим, я выбрал число 7695.

— Прекрасно. А теперь возьмем число *X*, которое порождает число 7695, а именно число 27695, потом введем в машину число 427695 и посмотрим, что получится. Мак-Каллох ввел в машину число 427695, а та выдала, разумеется, 5967 — обращение 7695.

— Прежде чем познакомить тебя со следующим правилом, — сказал Мак-Каллох, — я хочу продемонстрировать еще несколько операций, которые моя машина может проделывать с помощью правила 3, конечно, в совокупности с правилами 1 и 2.

1. — Ты, конечно, помнишь, — сказал Мак-Каллох, — что число 323 порождает само себя. Так вот, для моей старой машины, в которую еще не было заложено правило 3, а использовались лишь правила 1 и 2, — число 323 было единственным числом, которое могло порождать самое себя. Для моей теперешней машины ситуация оказывается несколько иной. Можешь ли ты найти какое-нибудь другое число, которое порождало бы самое себя? Кроме того, сколько существует таких чисел?

Решение этой задачи не отняло у Крейга много времени. А вы сумеете ее решить? (Ответ Крейга приведен в разделе «Решения».)

2. — Это было превосходно, — одобрительно сказал Мак-Каллох, внимательно выслушав пояснения Крейга. — Тогда позволь задать тебе другую задачу. Я называю число симметричным, если оно читается одинаково в ту и другую сторону, то есть если оно равно своему обращению. Так, например, числа вида 58385 или 7447 — симметричны. Числа, не являющиеся симметричными, я называю несимметричными — например, такие, как 46733 или 3251. Очевидно, что существует число, которое порождает обращение самого себя — это число 323; действительно, оно порождает само себя и к тому же симметрично. Для моей первой машины, в которую не было заложено правило 3, не существовало такого несимметричного числа, которое порождало бы свое собственное обращение. Однако в случае использования правила 3 такое число все-таки существует — и на самом деле даже не одно. Можешь ли ты найти такое число?

3. — Кроме того, — сказал Мак-Каллох, — существуют числа, которые порождают ассоциаты своих собственных обращений. Можешь ли ты найти такое число?

— А теперь, — продолжал Мак-Каллох, — сформулируем еще одно новое правило.

Правило 4. Если число *X* порождает число *Y*, то число 5*X* порождает число *YY*.

При этом напомню, что число *YY* называется повторением числа *Y*.

Затем Мак-Каллох предложил Крейгу рассмотреть иве новые задачи.

4. Найти число, которое порождает повторение самого.

5. Найти число, которое порождает обращение повторения самого себя.

6. — Вот странно, — удивился Мак-Каллох, когда Крейг показал ему решение задачи 5. — А у меня получился другой ответ — правда, тоже число, состоящее из семи цифр.

Действительно, существуют два семизначных числа, каждое из которых порождает обращение своего собственного повторения. Можете ли вы найти второе из лих чисел?

7. — Для любого *X*, — сказал Мак-Каллох, — число 52*X*, понятно, порождает повторение числа *X*. Не мог бы ты найти такое *X*, для которого число 5*X* порождало бы повторение самого X?

Крейг некоторое время размышлял, а потом внезапно рассмеялся: настолько очевидным оказалось решение!

8. — А теперь, — сказал Мак-Каллох, — пусть имеется число, которое порождает повторение ассоциата самого себя. Не мог бы ты найти это число?

9. — Кроме того, — продолжал Мак-Каллох, — существует число, которое порождает ассоциат своего собственного повторения. Можешь ли ты его найти?

Операционные числа

— А знаешь, — вдруг сказал Крейг, — я только сейчас сообразил, что все эти задачи могут быть решены, если исходить из некоторого общего принципа. Стоит лишь его понять, как оказывается возможным решать не только те задачи, которые ты мне задавал, но и массу других!

— Например, — продолжал Крейг, — должно существовать число, которое порождает повторение обращения своего собственного ассоциата, или, к примеру, число, которое порождает ассоциат повторения своего собственного обращения, или еще число, которое…

— Поразительно, — прервал его Мак-Каллох. — Я пробовал было отыскать несколько таких чисел, но у меня ничего не вышло. Что же это за числа?

— Ты научишься находить их мгновенно, как толь ко узнаешь, что это за принцип!

— Да что же это за принцип? — взмолился Мак-Каллох.

— И это не все, — продолжал Крейг, которому доставляло явное удовольствие разыгрывать Мак-Каллоха. — Я еще могу найти число *X*, которое порождает повторение обращения двоимого ассоциата *X*, или число *Y*, порождающее обращение двойного ассоциата числа *YYYY*, или число *Z*, которое…

— Хватит-хватит! — воскликнул Мак-Каллох. — А почему ты все-таки не хочешь мне сказать, в чем заключается твой принцип, а уж потом перейти к приложениям?

— Ну ладно, — согласился Крейг.

Тут инспектор взял лежавший на столе блокнот, вынул ручку и усадил Мак-Каллоха рядом с собой, с тем чтобы его друг мог видеть, что он пишет.

— Прежде всего, — начал Крейг, — я полагаю, что ты знаком с понятием *операции* над числами, как, например, операция прибавления единицы к данному числу, или операция умножения числа на 3, или операция возведения данного числа в квадрат, или, что имеет более близкое отношение к твоей машине, операция взятия *обращения* заданного числа или операции получения *повторения* и *ассоциата* некоторого числа, или же, наконец, более сложные операции, как, например, операция построения обращения повторения ассоциата некоторого числа. При этом буквой F будет обозначаться некоторая произвольная операция, а запись $F(X)$, где X — заданное число (мы будем читать Это выражение как «эф от икс»), будет означать результат выполнения операции F над числом X. Все это как ты прекрасно понимаешь, — вполне обычные математические обозначения. Итак, к примеру, если F есть операция обращения, то число $F(X)$ есть обращение числа X; если же F будет обозначать операцию повторения, а выражение $F(X)$ будет повторением числа X и так далее.

Пусть теперь имеются определенные числа — а фактически любые числа, составленные из цифр 3, 4 или 5, — я их буду называть операционными числами, поскольку они определяют операции, которые может выполнять твоя машина. Пусть M — некоторое число, состоящее из цифр 3, 4 или 5, и пусть F — произвольная операция. Я буду говорить, что число M определяет операцию F, имея в виду, что для любых двух чисел X и Y, в случае если X порождает Y, число $M(X)$ порождает число $F(Y)$. Например, если число X порождает число Y, то число $4X$ порождает обращение числа Y (согласно правилу 3), и поэтому я буду говорить, что число 4 определяет или обозначает операцию обращения данного числа. Аналогичным образом в соответствии с правилом 4 число 5 определяет операцию повторения, а число 3 — операцию ассоциации, то есть операцию получения ассоциата данного числа. Далее, предположим, что F представляет собой операцию, которая, если ее выполнить над числом X, дает нам ассоциат повторения X. Другими словами, $F(X)$ есть ассоциат повторения числа X. Существует ли число M, которое описывает эту операцию, и если да, то что это за число?

— Очевидно, 35, — ответил Мак-Каллох, — потому что если число X порождает число Y, то число $5X$ порождает повторение числа Y; значит, число 35*X* порождает ассоциат повторения *Y*. Таким образом, число 35 обозначает операцию получения ассоциата повторения некоторого заданного числа *X*.

— Совершенно верно, — подтвердил Крейг. — А теперь, когда мы определили, каким образом число *M* представляет собой ту или иную операцию, мы будем называть эту операцию операцией *M*. Так, например, операция 4 будет операцией обращения, операция 5 представляет собой операцию повторения, операция 35 является операцией получения ассоциата повторения и так далее.

Вместе с тем возникает вопрос, — продолжал он, — возможно ли, чтобы два различных числа описывали одну и ту же операцию? Иначе, могут ли существовать операционные числа *M* и *N*, такие, что при *M*, не равном *N*, операция *M* оказывается тождественной операции *N*?

Мак-Каллох на мгновение задумался.

— Ну, конечно, — сказал он. — Ведь, например, числа 45 и 54 различны, однако они определяют собой одну и ту же операцию, поскольку обращение повторения некоторого числа есть то же самое, что и повторение его обращения.

— Правильно, — согласился Крейг, — хотя, по правде говоря, я имел в виду совсем другой пример. Прежде всего, какую операцию описывает число 44?

— Ну, это ясно, — ответил Мак-Каллох, — Операция 44, если ею подействовать на заданное число *X*, дает нам обращение обращения этого числа, то есть само *X*. Правда, я не знаю, как назвать такую операцию, которая при воздействии на число *X* дает нам само это число.

— В математике такая операция называется обычно *операцией тождества*, — продолжал свои объяснения Крейг, — и поэтому число 44 будет определять собой именно операцию тождества. Но ту же самую операцию будет определять и число 4444 или, например, любое другое число, составленное из четного количества четверок. Таким образом, существует бесконечно много чисел, описывающих подобную операцию. А вообще говоря, если задано некоторое операционное число *M* и если оно следует за четным количеством четверок или предшествует ему (или же имеет место и то и другое одновременно), то это число *M* описывает ту же самую операцию, что и само отдельно взятое *M*.

— Понятно, — кивнул Мак-Каллох.

— А теперь, — пояснил далее Крейг, — если нам заданно операционное число *M* и произвольное число *X*, то, чтобы обозначить результат воздействия операции *M* на число *X*, я буду просто писать *M(X)*.

Например, число $3(X)$ будет представлять собой ассоциат X, $4(X)$ будет обращением числа X, $5(X)$ окажется повторением числа X, а число $435(X)$ будет представлять собой вращение ассоциата повторения числа X. Понятны тебе эти обозначения?

— Вполне, — ответил Мак-Каллох.

— Надеюсь, теперь ты не будешь путать запись $M(X)$ с записью MX. Ведь первая из них обозначает результат воздействия операции M на число X, в то время как вторая утверждает лишь то, что за числом M следует число X, — а это совсем разные вещи! Например, запись 3(5) обозначает вовсе не 35, а 525.

— Это мне тоже понятно, — сказал Мак-Каллох. — Однако не может ли случиться так — хотя бы в силу чистой случайности, — чтобы число $M(X)$ совпадало с MX?

— Интересный вопрос, — ответил Крейг. — Мне нужно его обдумать!

— Может, сначала выпьем еще по чашечке чаю? — предложил Мак-Каллох.

— С удовольствием! — согласился Крейг.

Пока наши друзья наслаждаются чаем, мне хотелось бы предложить вам несколько занимательных задач с операционными числами. Они позволят читателям приобрести необходимый опыт в использовании обозначений типа $M(X)$, которые будут играть важную роль при дальнейшем изложении.

10. Ответом на последний (математический!) вопрос Мак-Каллоха будет «да»: действительно существуют операционное число M и некоторое число X, такие, что $M(X) = MX$. Не могли бы вы найти их?

11. Существует ли операционное число M, для которого $M(M) = M$?

12. Найти операционное число M и заданное число X, для которых $M(X) = XXX$.

13. Найти операционное число M и число X, для которых $M(X) = M + 2$.

14. Найти M и X, для которых число $M(X)$ было бы повторением числа MX.

15. Найти операционные числа M и N, для которых $M(N)$ оказалось бы повторением $N(M)$.

16. Найти два различных операционных числа M и N, для которых $M(N) = N(M)$.

17. Не могли бы вы отыскать два операционных числа M и N, для которых $M(N) = N(M) + 39$?

18. Что можно сказать по поводу двух операционных чисел M и N, для которых $M(N) = N(M) + 492$?

19. Найти два различных операционных числа M и N, для которых выполняются условия $M(N) = MM$ и $N(M) = NN$.

Принцип Крейга

— Ты так и не рассказал мне, в чем же состоит твой принцип, — сказал Мак-Каллох, когда друзья покончили с чаем. — Полагаю, что об операционных числах и операциях мы заговорили именно в связи с этим принципом?

— Ну, конечно, — отвечал Крейг. — Теперь, я думаю, ты легко сможешь понять идею этого принципа. Помнишь задачи, которые ты предлагал мне раньше? Ну, например, найти число X, которое порождает повторение самого себя. Иначе говоря, мы искали некое число X, которое порождает $5(X)$. Или, пытаясь найти некоторое число X, которое порождает свой собственный ассоциат, мы искали число X, порождающее число $3(X)$. Далее в свою очередь вспомним, что число X, порождающее обращение числа X, есть число, которое порождает $4(X)$. Вместе с тем все эти задачи представляют собой частные случаи одного общего принципа, который заключается в следующем: для любого операционного числа M должно существовать некое число X, которое порождает $M(X)$. Другими словами, для любой заданной операции F, которую может выполнять твоя машина, — то есть для любой операции F, описываемой определенным операционным числом, — должно существовать число X, которое порождает $F(X)$.

Более того, — продолжал Крейг, — если задано какое-то операционное число M, то существует очень простой способ найти такое X, которое порождает $M(X)$. Зная этот общий способ, можно найти, например, число X, которое порождает 543*(X)*, — то есть решить задачу нахождения числа *X*, порождающего повторение обращения ассоциата этого *X;* или найти такое *X*, которое порождает 354*(X)*, — то есть решить задачу нахождения числа, порождающего ассоциат повторения своего собственного обращения. Или, как я уже упоминал, можно найти такое *X*, которое порождает повторение обращения двойного ассоциата *X*, — другими словами, найти *X*, порождающее 5433*(X)*. Если не знаешь этого способа, то решать эти задачи оказывается крайне затруднительным, если же воспользоваться моим принципом — то это будут не задачи, а детские игрушки.

— Я — весь внимание, — сказал Мак-Каллох. — Но что же это за такой замечательный способ?

— Сейчас объясню, — ответил Крейг, — но сначала давай разберем поподробнее одно вполне элементарное обстоятельство, а именно: для любого операционного числа *M* и для любых чисел *Y* и *Z*, если число *Y* порождает число *Z*, то *MY* порождает *M(Z)*. Например если *Y* порождает *Z*, то 3*Y* порождает 3*(Z)*, то есть ассоциат *Z;* 4*Y* порождает 4*(Z);* 5*Y* порождает 5*(Z);* 34*Y* порождает 34*(Z)* и т. д. Точно так же для любого операционного числа *M*, если *Y* порождает *Z*, то *MY* порождает *M(Z)*. В частности, если такое *Y*, порождающее *Z*, оказывается равным 2*Z*, тогда всегда справедливо утверждение, что *M*2*Z* порождает *M(Z)*. Например, число 32*Z* порождает число 3*(Z)* — ассоциат *Z;* число 42*Z* порождает число 4*(Z)*, то есть при любом операционном числе *M* число *M*2*Z* порождает число *M(Z)*. Собственно говоря, мы даже могли бы определить *M(Z)* как число, порождаемое числом *M*2*Z*.

— Это все понятно, — сказал Мак-Каллох.

— Прекрасно, — сказал Крейг, — однако этот факт легко забывается, поэтому разреши мне повторить его еще раз, с тем чтобы он хорошенько отложился у тебя в голове.

Итак, **утверждение 1:** для любого операционного числа *M* и для любых чисел *Y* и *Z*, если число *Y* порождает число *Z*, число *MY* порождает число *M(Z)*. В частности, число *M*2*Z* порождает число *M(Z)*.

— Отсюда, — продолжал Крейг, — а также из того факта, который ты обнаружил для своей первой машины и который справедлив и для нынешней, очевидно следует, что для любого заданного операционного числа *M* должно существовать некое число *X*, порождающее *M(X)*, — то есть в данном случае число *X* порождает результат применения операции *M* к числу *X*. При этом, зная число *M*, такое *X* можно легко найти с помощью простого и вполне общего правила.

20. Итак, Крейг открыл важное правило, которое мы в дальнейшем будем называть принципом Крейга, а именно: для любого операционного числа *M* всегда существует некоторое число *X*, такое, что оно порождает *M(X)*. Как же доказать принцип Крейга и как при заданном числе *M* найти число *X*? Например, какое число *X* порождает 543*(X)*? Или какое число *X* порождает повторение обращения ассоциата *X*? Или, наконец, какое *X* порождает ассоциат повторения обращения *X* — то есть какое *X* порождает 354*(X)*?

— Я приготовил для тебя еще несколько задачек, — сказал Мак-Каллох, — однако сегодня уже поздно. Оставайся-ка ночевать у меня. А завтра мы с тобой поговорим подробнее.

У Крейга как раз было несколько свободных дней, и поэтому он с удовольствием принял приглашение Мак-Каллоха.

Некоторые варианты принципа Крейга

Наутро после плотного завтрака — а хозяин оказался человеком очень гостеприимным — Мак-Каллох предложил Крейгу следующие задачи.

21. Найти число *X*, которое порождает число 7*X*7*X*.

22. Найти число *X*, которое порождает обращение числа 9*X*.

23. Найти число *X*, которое порождает ассоциат числа 89*X*.

— Очень мило! — воскликнул Крейг, после того как покончил с решением последней задачи. — Ни одну из их задач нельзя решить с помощью того принципа, о котором я тебе рассказывал вчера.

— Вот именно! — рассмеялся Мак-Каллох.

— И все-таки, — возразил Крейг, — решение всех грех задач подчиняется некой общей идее: во-первых, конкретные числа 7, 5 и 89 не играют никакой роли; для любого данного числа *A* существует определенное число *X*, которое порождает повторение числа *AX*, еще какое-то *X* порождает обращение AX; наконец, есть *X*, порождающее ассоциат числа *AX*. Кроме того, существует также некое число *X*, которое порождает повторение обращения числа *AX* или, например, обращение ассоциата *AX*. Фактически это означает, что для любого операционного числа *M* и для любого заданного числа *A* должно существовать некоторое число *X*, которое порождает *M(AX)*, то есть число, полученное в результате применения операции *M* к числу AX.

24. Крейг, разумеется, был прав: для любого операционного числа *M* и для любого заданного числа *A* должно найтись некоторое число *X*, которое порождает число *M(AX)*. Будем называть это правило вторым принципом Крейга. Как же доказать этот принцип? И как при заданном операционном числе *M* и заданном *A* найти в явном виде такое число *X*, которое порождает *M(AX)*?

25. — Мне только что пришел в голову еще один вопрос, — сказал Мак-Каллох. — Пусть для любого числа *X* величина *X* обозначает обращение этого *X*. Можешь ли ты найти такое число *X*, которое порождает *X*67? (Иначе, существует ли такое число *X*, которое порождает обращение числа *X*, за которым следует число 67?) В общем виде этот вопрос можно сформулировать так: действительно ли для любого числа *A* существует некоторое число *X*, которое порождает *XA*?

26. — Мне в голову пришел еще один вопрос, — сказал Мак-Каллох. — Существует ли такое число *X*, которое порождает повторение числа *X*67? Или, в более общем виде: действительно ли для любого числа *A* существует такое число *X*, которое порождает повторение числа *XA*? Или, если задать вопрос в еще более общем виде: действительно ли для любого числа *A* и для любого операционного числа *M* должно существовать некоторое число *X*, которое порождает *M(XA)*?

Обсуждение. Принцип Крейга справедлив не только для второй машины Мак-Каллоха, но и для первой — а в сущности и для любой машины, в которую заложены правила 1 и 2. Это означает, что, как бы мы ни расширяли первую машину Мак-Каллоха, вводя в нее новые правила, работа результирующего устройства все равно будет подчиняться принципу Крейга (а фактически обоим его принципам).

Первый принцип Крейга связан с одним из знаменитых результатов теории вычислимых функций, известным под названием *теоремы о рекурсии* (или, как ее иногда называют, *теоремы о неподвижной точке*). С помощью правил 1 и 2, предложенных Мак-Каллохом, этот результат получается, пожалуй, наиболее простым способом. Кроме того, эти правила обладают еще одним занятным свойством (связанным уже с другим знаменитым результатом теории вычислимых функций, известным под названием теоремы о двойной рекурсии), о котором пойдет речь в следующей главе. Наконец, все эти сведения имеют отношение к теории самовоспроизводящихся машин и теории клонирования.

Решения

1. — С помощью твоей теперешней машины можно получить бесконечное множество чисел, которые порождают сами себя, — сказал Крейг.

— Это верно, — согласился Мак-Каллох. — Но как ты это докажешь?

— Начнем с того, — сказал Крейг, — что будем называть некое число *SA* числом, если оно обладает тем свойством, что для любых чисел *X* и *Y* в случае, если *X* порождает *Y*, число *SX* порождает ассоциат *Y*. До того как ты ввел свое новое правило, единственным *A*-числом у нас было число 3. Однако для твоей нынешней машины существует бесконечное множество *A*-чисел, причем для любого *A*-числа *S* число *S*2*S* обязательно должно порождать само себя, поскольку число *S*2*S* порождает ассоциат числа *S*, который и есть *S*2*S*.

— А как ты догадался, что существует бесконечное множество *A*-чисел? — спросил Мак-Каллох.

— Ну, во-первых, — ответил Крейг, — надеюсь, ты не будешь возражать, что при любых числах *X* и *Y*, если число *X* порождает *Y*, то число 44*X* будет также порождать *Y*?

— Удачное наблюдение! — воскликнул Мак-Каллох. — Конечно, ты прав: ведь если *X* порождает *Y*, то число 4*X* порождает обращение числа *Y*, а значит, число 44*X* должно порождать обращение обращения *Y* — то есть само это число *Y*.

— Прекрасно, — продолжал Крейг. — Таким образом, если *X* порождает *Y*, то число 44*X* будет тоже порождать *Y*, и поэтому число 344*X* будет порождать ассоциат числа *Y*. Значит, 344 тоже представляет собой *A*-число. А раз 344 — это *A*-число, то число 3442344 должно также порождать само себя!

— Замечательно, — сказал Мак-Каллох, — теперь у нас есть уже два числа — 323 и 3442344, которые порождают сами себя. Но разве это позволяет нам сделать вывод о бесконечном множестве таких чисел?

— Видишь ли, — сказал Крейг, — если число *S* является *A*-числом, то *A*-числом должно быть также и число *S*44, поскольку для любых чисел *X* и

Y, если *X* порождает *Y*, то число 44*X* тоже порождает *Y*, а значит, число *S*44*X* порождает ассоциат *Y*, поскольку *S* по условию есть *A*-число. Таким образом, *A*-числами являются такие числа, как 3, 344, 34444, и вообще *A*-числом является любое число, состоящее из тройки, за которой следует любое четное число четверок. Итак, число 323 порождает само себя; то же самое можно сказать о числах 3442344, 34444234444 и т. д. Следовательно, мы действительно имеем бесконечное множество решений.

— Но, между прочим, — добавил Крейг, — ведь существуют и другие решения. Например, числа 443 и 44443 тоже представляют собой *A*-числа. *A*-числом является также любое число, состоящее из четного числа четверок, тройки и опять четного числа четверок, как, например, число 4434444, — ведь для любого такого числа *S* число *S*2*S* порождает самое себя.

2. Одно из решений — это число 43243. В самом деле, поскольку число 243 порождает 43, то число 3243 порождает ассоциат числа 43. Значит, число 43243 должно порождать обращение ассоциата числа 43, другими словами, обращение числа 43243 (поскольку число 43243 — это ассоциат числа 43). Итак, число 43243 порождает обращение самого себя.

Здесь читатель может поинтересоваться, а как же все-таки было найдено само число 43243. Может, с помощью сравнения соответствующих относительных длин? Нет, для доказательства свойств, относящихся к нынешней машине, метод сравнения относительных длин оказывается слишком громоздким. Как будет показано в конце этой главы, решение было найдено именно с помощью принципа Крейга.

3. Одним из решений является число 3432343. Мы предоставляем читателю самому найти число, порождаемое числом 3432343, и убедиться, что оно действительно представляет собой ассоциат обращения числа 3432343. (Это решение также было найдено с помощью принципа Крейга.)

4. Подходит, например, число 53253. (Оно получено опять же с помощью принципа Крейга.)

5. Одно из решений — число 4532453.

6. Другое решение — это число 5432543.

7. Решение очевидно — в том, конечно, случае, если нам известно, что некое число порождает само себя. При этом если X порождает X, то ясно, что $5X$ порождает повторение X. Так, например, число 5323 порождает повторение числа 323.

8. Одно из решений — число 5332533. (Опять принцип Крейга!)

9. Одно из решений — число 3532353; оно тоже найдено с помощью принципа Крейга. (Надеюсь, я заинтриговал читателя этим принципом!)

10. 5(5) = 55. [Так как 5(5) — это повторение числа 5.] Поэтому возьмем число 5 в качестве M и число 5 в качестве X. (Ведь я не утверждал, что M и X должны быть разными числами.)

11. 4(4) = 4. [Поскольку 4(4) — это обращение числа 4, которое также равно 4.] Таким образом, $M = 4$ является одним из решений. (Фактически в качестве решения подойдет любая цепочка четверок.)

12. Возьмем $M = 3$ и А = 2. [3(2) = 222].

13. 4(6) = 6, а 6 = 4 + 2, поэтому 4(6) = 4 + 2. Итак, $M = 4$, а $X = 2$.

14. Одно из решений: $M = 55$, $X = 55$.

15. Одно из решений: $M = 4$, $N = 44$.

16. Одно из решений: $M = 5$, $N = 55$.

17. Одно из решений: $M = 5$, $N = 4$.

18. Одно из решений: $M = 3$, $N = 5$.

19. Одно из решений: $M = 55$, $N = 45$.

20. Пусть M — любое операционное число. Мы знаем (утверждение 1), что в случае любых чисел Y и Z, если Y порождает Z, MY порождает $M(Z)$. Поэтому (принимая MY в качестве Z), если Y порождает MY, то MY должно порождать $M(MY)$. Таким образом, если вы брать MY в качестве X, то число X будет порождать $M(X)$. Итак, наша задача сводится к нахождению такого числа Y, которое порождает MY. Но эта задача уже была решена в предыдущей главе (с помощью закона Мак-Каллоха): надо просто взять в качестве *Y* число 32*M*3. Итак, за *X* мы принимаем число *M*32*M*3, причем это *X* будет порождать *M(X).* Проверим полученный результат: в самом деле, пусть *X* = *M*32*M*3. Но поскольку число 2*M*3 порождает число *M*3, то число 32*M*3 порождает число *M*32*M*3 (согласно правилу 2), и, следовательно, число *M*32*M*3 будет порождать *M*(*M*32*M*3). Таким образом, действительно *X* порождает *M(X),* где *X* — число *M*32*M*3.

Рассмотрим теперь некоторые приложения. Для того чтобы найти некое число *X,* порождающее повторение *X,* примем 5 в качестве *M;* тогда сразу получаем решение (а точнее, одно из решений) — число 53253. Для того чтобы найти число *X,* порождающее обращение самого себя, положим *M* = 4; тогда *X* есть число 43243. Для того чтобы найти число *X,* которое порождало бы ассоциат обращения *X,* выберем в качестве *M* число 34; отсюда возможное решение — число 3432343.

Для решения первой задачи Мак-Каллоха (найти число *X,* которое порождает повторение обращения ассоциата *X*) выберем в качестве *M* число 543 (5 — для получения повторения, 4 — для получения обращения и 3 — для получения ассоциата); решением в данном случае является число 543325433. (Читатель может легко удостовериться непосредственно, что число 543325433 действительно порождает повторение обращения ассоциата числа 543325433.)

Для решения второй задачи Мак-Каллоха (найти число *X,* которое порождает ассоциат повторения обращения *X*) возьмем в качестве *M* число 354; в результате получим решение — число 354323543.

Да, действительно, принцип Крейга великолепно работает в этих ситуациях!

21, 22, 23, 24. Задачи 21, 22 и 23 являются частными случаями задачи 24, поэтому мы начнем прямо с последней из них.

Пусть нам дано операционное число *M* и произвольное число A, причем мы хотим найти некое число *X,* которое порождает *M(AX).* Вся штука теперь состоит в том, чтобы найти такое число *Y,* которое не порождает *MY,* однако порождает *AMY.* Возьмем в качестве *Y* число 32*AM*3. Поскольку *Y* порождает *AMY,* тогда *MY* в соответствии с утверждением 1 должно порождать *M(AMY).* Значит, если принять за *X* величину *MY,* то *X* будет порождать *M(AX).* Но поскольку мы выбрали в качестве *Y* число 32*AM*3, то число *X* в (данном случае будет равно *M*32*AM*3. Итак, искомое решение — число вида *M*32*AM*3.

Попробуем применить этот результат к решению задачи 21. Прежде всего отметим, что число 7*X*7*X* — это просто повторение 7*X*, так что мы ищем некое число *X*, которое порождает повторение 7*X* — или повторение *AX*, если считать *A* равным 7. Итак, *A* — это 7, а за *M*, очевидно, можно принять число 5 (поскольку 5 представляет собой операцию повторения); поэтому решением будет число 532753. (Читатель легко может убедиться сам, что число 532753 действительно порождает повторение числа 7532753.) Для задачи 22 в качестве *A* возьмем 9, а в качестве *M* примем 4, тогда решение — число 432943. Для задачи 23 в качестве *A* выберем 89, а в качестве *M* — число 3; решением будет 3328933.

25. Да, для любого числа *A* существует некое число *X*, которое порождает $\overleftarrow{X}A$, а именно $432\overleftarrow{A}443$. (В данной конкретной задаче, для которой $A = 67$, имеем $\overleftarrow{A} = 76$, так что решением будет число 4327643.)

26. При рассмотрении наиболее общего случая самое главное — понять, что $\overleftarrow{X}A$ — это обращение $\overleftarrow{A}X$, и по этому $M(\overleftarrow{X}A) = M4(\overleftarrow{A}X)$. Согласно второму принципу Крейга, числом *X*, порождающим $M4(\overleftarrow{A}X)$, является число *M*432*AM*43 — оно и будет решением дайной задачи. В частном случае, если вместо *M* взять 5, а вместо *A* — 67, числом *X*, порождающим повторение $\overleftarrow{X}67$, будет число 543276543 (в чем читатель может легко убедиться сам).

11. Законы Фергюссона

А сейчас мы перейдем к рассказу о еще более интересных событиях, связанных с машинами Мак-Каллоха. Недели две спустя Мак-Каллох получил от Крейга письмо следующего содержания:

> Мой дорогой Мак-Каллох!
>
> Я и мой друг Малькольм Фергюссон крайне заинтересовались твоими цифровыми машинами. Кстати, ты случайно не знаком с Фергюссоном? Последнее время он ведет активные исследования в области чистой логики и даже собственноручно построил несколько логических машин. Однако его интересы не ограничиваются этим; так, он весьма интересуется шахматными задачами, относящимися к области так называемого ретроградного анализа. Кроме того, он занимается и чисто комбинаторными задачами, с которыми так успешно справляются твои машины. На прошлой неделе я заглянул к нему в гости и показал все твои задачи — они его очень заинтересовали. Когда через три дня я вновь встретил Фергюссона, он невзначай заметил в разговоре что, по его мнению, обе твои машины обладают некоторыми новыми любопытными свойствами, о которых ты сам как изобретатель, по-видимому, даже не подозреваешь. Выражался он несколько туманно и сказал, что хочет еще поразмыслить обо всем этом.
>
> В следующую пятницу я пригласил Фергюссона пообедать со мной. Не хочешь ли присоединиться к нам? Уверен, что у вас обоих найдется много общих тем для разговора; быть может, мы узнаем, что у него на уме.
>
> В надежде на скорую встречу
> искренне твой
> Л. Крейг

Ответ Мак-Каллоха не заставил себя долго ждать:

> Дорогой Крейг!
>
> С Малькольмом Фергюссоном я не знаком, но многое слышал о нем от наших общих знакомых. Не учился ли он у

известного логика Готлоба Фреге? Насколько мне известно, он занимается некоторыми проблемами, весьма важными для оснований математики, и, конечно, я с удовольствием воспользуюсь возможностью познакомиться с ним лично. Само собой разумеется, мне будет также крайне любопытно узнать его мнение по поводу построенных мною машин. Весьма благодарен тебе за приглашение и с радостью его принимаю.

С глубоким уважением

Н. Мак-Каллох

Гости съехались. После превосходного обеда (его приготовила квартирная хозяйка Крейга миссис Хоффман) разговор зашел о математике.

— Я слышал, вы построили несколько логических машин, — сказал Мак-Каллох. — Интересно было узнать о них поподробнее. Может быть, вы расскажете, как они работают?

— О, это долгий разговор, — отвечал Фергюссон. — К тому же я до сих пор не нашел ответа на один очень важный вопрос, связанный с их работой. Может, вы с Крейгом зайдете как-нибудь ко мне в лабораторию? Тогда я вам обо всем и расскажу. А сегодня я предпочел бы поговорить о ваших машинах. Несколько дней назад я рассказывал Крейгу, что у них обнаружились некоторые свойства, о которых, мне кажется, вы и не подозреваете.

— Что же это за свойства? — спросил Мак-Каллох.

1. — Ну что ж, — сказал Фергюссон, — давайте начнем с конкретного вопроса, относящегося к вашей второй машине. Пусть имеются некие числа X и Y, такие, что число X порождает обращение числа Y, а Y порождает повторение числа X. Можете ли вы найти эти числа?

Крейга и Мак-Каллоха эта задача чрезвычайно заинтересовала, и они тут же засели за ее решение. Однако ни тому, ни другому это не удалось. Решить эту задачу, конечно, можно, и, вероятно, наш честолюбивый читатель не прочь попробовать сделать это сам. Заметим только, что в основе решения лежит один важный принцип (о котором пойдет речь в этой главе); если знать его, то решение задачи оказывается на удивление простым.

2. — Вы меня просто заинтриговали, — заявил Крейг, когда Фергюссон показал им решение. — Я вижу, что ваше решение правильно, но как вам удалось его найти? Вы просто случайно наткнулись на эти числа

X и *Y* или действовали по заранее намеченному плану? Мне, например, это кажется прямо каким-то фокусом.

— Вот именно, — вставил Мак-Каллох. — Так, знаете, фокусник в цирке вытаскивает кролика из шляпы!

— Ага, — засмеялся Фергюссон, явно наслаждаясь произведенным эффектом. — Только не одного, а двух кроликов, и при том они еще некоторым образом влияют друг на друга. Это точно, — сказал Крейг. — Но все же мне бы хотелось знать, как вы догадались, каких именно кроликов надо тащить?

— Прекрасный, ну просто замечательный вопрос! — сияя, воскликнул Фергюссон. — А ну-ка — вот вам еще задачка: найти такие числа *X* и *Y*, чтобы число *X* порождало повторение числа *Y*, а число *Y* порождало обращение ассоциата *X*.

— С меня хватит! — воскликнул Мак-Каллох.

— Минуточку, минуточку, — перебил их Крейг. — Я, кажется, что-то начинаю понимать. Не хотите ли вы сказать, Фергюссон, что для любых двух операций, которые может выполнять машина, то есть для любых двух заданных операционных чисел *M* и *N*, должны существовать некие числа *X* и *Y*, характеризующиеся тем, что *X* порождает *M(Y)*, а *Y* порождает *N(X)*?

— Вот именно! — воскликнул Фергюссон. — И поэтому мы можем найти, например, такие числа *X* и *Y*, для которых *X* порождает двойной ассоциат *Y*, а *Y* порождает повторение обращения *X* или любые другие комбинации, какие вы захотите.

— Вот так штука! — изумился Мак-Каллох. — Ведь все это время я пытался придумать машину как раз с таким свойством, а она у меня, оказывается, уже есть!

— Безусловно есть, — подтвердил Фергюссон.

— А как вы докажете это свойство? — спросил Мак-Каллох.

— Я бы хотел начать доказывать его постепенно, — ответил Фергюссон. — Собственно говоря, суть дела заключается в ваших правилах 1 и 2. Поэтому сначала позвольте сделать несколько замечаний относительно вашей первой машины — той, в которой используются только эти два правила. Начнем со следующей простой задачи: можно ли, используя правила 1 и 2, найти два различных числа *X* и *Y*, таких, чтобы число *X* порождало *Y*, а число *Y* в свою очередь порождало X?

Крейг и Мак-Каллох тут же занялись этой задачей.

— Ну, конечно, — рассмеялся вдруг Крейг. — Это же очевидно вытекает из того, что совсем недавно показы вал мне Мак-Каллох.

А вы можете найти эти числа?

— Теперь, — сказал Фергюссон, — для любого числа *A* существуют такие числа *X* и *Y*, что *X* порождает *Y*, а число *Y* порождает *AX*. Если число А нам задано, то можете ли вы найти числа *X* и *Y*? Например, можете ли вы найти такие *X* и *Y*, чтобы *X* порождало *Y*, а *Y* порождало 7*X*?

— Мы все еще пользуемся только правилами 1 и 2 или уже можно применять правила 3 и 4? — спросил Крейг.

— Вам понадобятся только правила 1 и 2, — ответил Фергюссон.

— Я уже нашел решение! — тут же заявил Крейг.

4. — Интересно, — сказал Мак-Каллох, просмотрев решение Крейга. — А у меня решение другое.

Действительно, в этой задаче существует и второе решение. Можете ли вы его найти?

5. — Ну, а теперь, — сказал Фергюссон, — мы добрались до действительно важного свойства. Так, из одних только правил 1 и 2 следует, что для любых чисел А и В существуют такие числа *X* и *Y*, при которых *X* порождает *AY*, а *Y* порождает *BX*. Например, существуют такие *X* и *Y*, что *X* порождает 7*Y*, а *Y* порождает 8*X*. Не можете ли вы найти эти числа?

6. — Из последней задачи, — сказал Фергюссон, — со всей очевидностью следует (правда, из второго принципа Крейга это получается еще более просто), что для любых операционных чисел *M* и N должны существовать такие числа *X* и *Y*, при которых *X* порождает *M(Y)*, а *Y* порождает *N(X)*. Причем это оказывается справедливым не только для данной машины, но и для любой машины, в программу работы которой включены правила 1 и 2. С помощью вашей теперешней машины можно, например, найти такие *X* и *Y*, при которых число *X* порождает обращение числа *Y*, а число *Y* порождает ассоциат числа *X*. Сумеете ли вы их найти?

7. — Это страшно интересно, — сказал Фергюссону Мак-Каллох, когда они с Крейгом решили последнюю задачу. — Но у меня возник вот какой вопрос: подчиняется ли моя машина «двойному» аналогу второго принципа Крейга? Иначе говоря, если заданы два операционных числа *M* и *N*, а также два произвольных числа А и В, то обязательно ли существуют такие числа *X* и *Y*, при которых *X* порождает *M(AY)*, а *Y* порождает *N(BX)*?

— Ну, конечно, — подтвердил Фергюссон. — Например, существуют такие числа *X* и *Y*, при которых число *X* порождает повторение 7*Y*, а число *Y* порождает обращение 89*X*.

Не могли бы вы найти эти числа?

8. — Я подумал еще вот о чем, — сказал Крейг. — Если имеется некоторое операционное число *M* и произвольное число В, то обязательно ли должны существовать такие числа *X* и *Y,* при которых *X* порождает *M(Y),* а *Y* порождает *BX*? Например, существуют ли такие *X* и *Y,* при которых число *X* порождает ассоциат *Y,* а число *Y* порождает число 78*X*?

А как думаете вы?

9. — Фактически, — продолжал пояснения Фергюссон, — у нас возможны самые разные комбинации. Так, давая некоторые операционные числа *M* и *N* и произвольные числа *A* и *B,* всегда можно найти числа *X* и *Y,* которые отвечают любому из ниже перечисленных условий:

а) *X* порождает *M(AY)* а *Y* порождает *N(X)*;

б) *X* порождает *M(AY)* а *Y* порождает *BX*;

в) *X* порождает *M(Y),* а *Y* порождает *X;*

г) *X* порождает *M(AY),* а *Y* порождает *X.*

Попробуйте доказать эти утверждения.

10. Триплеты и так далее.

— Ну, теперь-то, мне кажется, мы перебрали уже все возможные варианты, — сказал Крейг.

— Да нет, — ответил Фергюссон. — То, что я вам показывал до сих пор, — это еще только начало. А знаете ли вы, например, что существуют три числа *X, Y* и *Z,* такие, что число *X* порождает обращение *Y,* число *Y* порождает повторение *Z,* а число *Z* порождает ассоциат *X*?

— Неужели? — удивился Мак-Каллох.

— Именно так, — подтвердил Фергюссон. — Более того, если заданы три произвольных операционных числа *M, N* и *P,* то должны существовать такие числа *X, Y* и *Z,* при которых *X* порождает *M(Y), Y* порождает *N(Z),* а *Z* порождает *P(X).*

Не сумеете ли вы, читатель, доказать это утверждение? И в частности, каковы будут эти числа *X, Y* и *Z,* если известно, что число *X* порождает обращение *Y,* число *Y* порождает повторение *Z,* а число *Z* порождает ассоциат *X*?

После того как Крейг и Мак-Каллох решили и эту задачу, Фергюссон сказал:

— Конечно, тут тоже возможны самые разные варианты этого «тройного» закона. Например, если заданы три любых операционных числа

M, N и *P,* а также три произвольных числа *A*, *B* и *C*, то существуют такие числа *X*, *Y* и *Z*, при которых число *X* порождает *M(AY)*, число *Y* порождает *N(BZ)*, а число *Z* порождает *P(CX)*. Это справедливо и в том случае, если взять не три числа *A, B, C,* а любые два из них или даже одно.[5] Так, мы можем найти такие числа *X, Y* и *Z*, при которых *X* порождает *AY, Y* порождает *M(Z)*, а *Z* порождает *N(BX)*. Возможны, естественно, и всякие другие варианты — вы вполне можете заняться ими на досуге.

— Кроме того, — продолжал он, — та же идея действует и тогда, когда мы используем 4 операционных числа или даже более. Например, мы можем найти числа *X, Y, Z* и *W*, при которых число *X* порождает 78*Y*, число *Y* порождает повторение *Z*, число *Z* порождает обращение *W*, а число *W* порождает ассоциат 62*X*. Возможности практически бесконечны, причем их удивительное многообразие обусловлено всего лишь правилами 1 и 2.

Решения

1. Одно из решений состоит в том, чтобы принять *X* = 4325243 и *Y* = 524325243. Поскольку число 25243 порождает число 5243, то число 325243 порождает ассоциат 5243, или число 524325243, которое и есть *Y*.

Далее, так как число 325243 порождает *Y*, то число 4325243 порождает обращение *Y*, но 4325243 — это как раз и есть *X*. Таким образом, *X* порождает обращение Y. Кроме того. *Y*, очевидно, порождает повторение *X* (потому что *Y* — это есть число 52*X*, а поскольку число 2*X* порождает *X*, то число 52*X* будет порождать повторение *X*). Итак, *X* порождает обращение *Y*, а *Y* порождает повторение *X*.

2. Крейг воспользовался законом Мак-Каллоха, а именно: для любого числа *A* существует некоторое число *X* (а именно число 32*A*3), которое порождает число *AX*. Так, в частности, если мы примем *A* за число 2, то получим некоторое число *X* (а именно число 3223), которое порождает 2*X*. Число же 2*X* в свою очередь будет порождать *X*. Таким образом, в качестве решения этой задачи подходит пара чисел 3223 и 23223: 3223 порождает 23223, а 23223 порождает 3223.

3. Крейг решил эту задачу следующим способом. Он рассудил, что ему надо всего лишь найти такое число *X*, которое порождает 27*X*. Тогда, положив *Y* = 27*X*, мы получим, что число *X* порождает *Y*, а число *Y* порождает 7*X*. Такое число *X* он тоже нашел — это число 32273. Поэтому решение Крейга имеет вид: $X = 32273$, $Y = 2732273$.

То же самое происходит, конечно, и в том случае, если вместо конкретного числа 7 мы возьмем любое число A. В самом деле, если $X = 322A3$, а $Y = 2A322A3$, то число X будет порождать Y, а число Y будет порождать AX.

4. Что же касается Мак-Каллоха, то он подошел к решению данной задачи несколько иначе. Он начал с того, что стал искать такое число Y, которое порождает $72Y$. Теперь, если обозначить через X число $2Y$, то мы получаем, что число X порождает Y, а число Y порождает $7X$. При этом нам уже известно, как найти такое число Y — надо взять $Y = 32723$. Итак, решение Мак-Каллоха имеет вид: $X = 232723$, $Y = 32723$.

5. Единственное, что нам нужно — это найти такое число X, которое порождало бы число $A2BX$. Тогда, если мы положим $Y = 2BX$, то будем иметь, что число X порождает AY, а число Y порождает BX. Таким числом X, которое порождает $A2BX$, является число $32A2B3$. Стало быть, решение задачи выглядит так: $X = 32A2B3$, $Y = 2B32A2B3$. (В частном случае $A = 7$, $B = 8$ и решением будет $X = 327283$, $Y = 28327283$.)

6. Сначала попробуем решить эту задачу с помощью второго принципа Крейга, который, как мы помним, гласит, что для любого операционного числа M и для произвольного числа A существует некоторое число X (а именно число $M32AM3$), которое порождает $M(AX)$. Возьмем теперь два любых операционных числа M и N. Тогда, согласно этому принципу (если взять в качестве A число $N2$), найдется некое число X (а именно число $M32N2M3$), которое порождает число $M(N2X)$. Ясно также, что число $N2X$ порождает $N(X)$. Поэтому если обозначить число $N2X$ через Y, то мы получим, что число X порождает $M(Y)$, а число Y порождает $N(X)$. Следовательно, решение задачи имеет вид: $X = M32N2M3$, $Y = N2M32N2M3$. (Для конкретной задачи, предложенной Фергюссоном, положим $M = 4$ и $N = 3$, тогда решение будет таким: $X = 4323243$, $Y = 324323243$, читатель сам может убедиться в том, что X порождает обращение Y, а Y порождает ассоциат X; последняя часть этого утверждения особенно очевидна.)

Можно подойти к решению этой задачи и по-другому. Из решения задачи 5 мы знаем, что существуют числа Z и W, при которых Z порождает NW, а W порождает MZ (а именно числа $Z = 32N2M3$ и $W = 2M32N2M3$). Тогда, согласно утверждению 1 из предыдущей главы, число MZ порождает $M(NW)$, а число NW порождает $N(MZ)$. Поэтому если мы обозначим MZ

через X, а NW через Y, то сразу получим, что число X порождает $M(Y)$, а число Y порождает $N(X)$. Таким образом, мы получаем то же самое решение: $X = M32N2M3$ и $Y = N2M32N2M3$.

7. Здесь нам необходимо найти такое число X, которое порождало бы число $M(AN2BX)$; согласно второму принципу Крейга, таким числом X является число $M32AN2BM3$. Возьмем $N2BX$ в качестве Y; тогда число X порождает $M(AY)$, а число Y (которое есть $N2BX$), очевидно, порождает $N(BX)$. Итак, общее решение задачи (или, по крайней мере, одно из возможных общих решений) имеет вид: $X = M32AN2BM3$, $Y = N2BM32AN2BM3$. Для конкретного частного случая положим $M = 5$, $N = 4$, $A = 7$ и $B = 89$.

8. Согласно второму принципу Крейга, существует некоторое число X, которое порождает $M(2BX)$, а именно $X = M322BM3$. Положим теперь $Y = 2BX$. Тогда X порождает $M(Y)$, а Y порождает BX. Для конкретного частного случая примем $M = 3$ и $B = 78$; при этом решение будет иметь вид: $X = 33227833$, $Y = 27833227833$.

9. а) Возьмем некоторое число X, которое порождает $M(AN2X)$, и обозначим через Y число $N2X$. (Мы можем взять X равным $M32AN23$, а $Y = N2M32AN23$.) Тогда X порождает $M(AY)$, а Y порождает $N(X)$.

б) Теперь возьмем X, которое порождает $M(A2BX)$, и обозначим через Y число $2BX$. (Итак, в этом случае решение имеет вид: $X = M32A2B3$, $Y = 2\mathbf{BM}32A2B3$.)

в) Если число X порождает $M(Y)$, а $Y = 2X$, то мы сразу имеем решение задачи; поэтому положим $X = M322M3$, $Y = 2M322M3$.

г) Если X порождает $M(AY)$, а $Y = 2X$, то мы сразу получаем требуемое решение; поэтому положим $X = M32A2M3$ и $Y = 2M32A2M3$.

10. Согласно второму принципу Крейга, существует некое число X, которое порождает $M(N2P2X)$, а именно $X = M32N2P2M3$. Положим $Y = N2P2X$, тогда число X порождает $M(Y)$. Пусть теперь $Z = P2X$, тогда $Y = N2Z$; при этом число Y порождает $N(Z)$, а число Z порождает $P(X)$. Таким образом, в явном виде решение будет таким: $X = M32N2P2M3$, $Y = N2P2M32N2P2M3$, $Z = P2M32N2P2M3$.

Для частного случая это решение имеет вид: $X = 432523243$, $Y = 5232432523243$, $Z = 32432523243$.

Читатель сам может легко убедиться, что действительно X порождает обращение Y, Y порождает повторение Z, а Z порождает ассоциат X.

Кстати говоря, для любых трех чисел A, B и C мы всегда можем найти такие числа U, V и W, при которых U порождает AV, V порождает BW, а W порождает CU. Для этого надо просто взять такое число U, которое порождало бы число $A2B2CU$ (если же мы воспользуемся вторым принципом Крейга, то получим $U = 32A2B2C3$). Положим теперь $V = 2B2CU$ и $W = 2CU$. Тогда число U будет порождать AV, число V будет порождать BW, а число W будет порождать CU. Наконец, если теперь принять A, B и C за операционные числа и положить $X = AV$, $Y = BW$ и $Z = CU$, то мы получим, что число X порождает $A(Y)$, число Y порождает $B(Z)$, а число Z порождает $C(X)$. Таким образом, мы нашли еще один способ решения данной задачи.

12. Остановимся, попробуем обобщить!

Два дня спустя полицейское начальство из Скотланд-Ярда внезапно и совершенно неожиданно для Крейга срочно откомандировало его в Норвегию для расследования, хотя и интересного, но нас не касающегося. Поэтому я воспользуюсь отсутствием Крейга, чтобы поделиться с вами кое-какими собственными соображениями по поводу числовых машин Мак-Каллоха. Те же читатели, которым не терпится узнать решение загадки сейфа из Монте-Карло, могут отложить чтение этой главы на потом.

Математики обожают обобщать! Сплошь и рядом случается так: некий математик по имени *X* доказывает новую теорему и публикует доказательство в научном журнале. Потом проходит полгода и появляется другой математик, *Y*, который вдруг заявляет: «Ну ладно, неплохую теоремку доказал этот *X*, однако я могу доказать гораздо более общий случай!» И тут же печатает статью под названием «Об одном обобщении теоремы X-а». Или же *Y* оказывается похитрее и поступает следующим образом: сначала он втайне обобщает теорему, доказанную X-м, а потом исследует какой-нибудь частный случай своего обобщения. Этот частный случай по внешнему виду обычно настолько отличается от исходной теоремы, предложенной X-м, что *Y* вполне может опубликовать полученный результат в качестве новой, оригинальной теоремы. Тут на сцене, естественно, появляется третий математик по имени Z: этого Z никак не оставляет чувство, что где-то теоремы X-а и Y-а в чем-то важном очень сходны. Он начинает напряженно работать и… обнаруживает некий общий принцип. Z тут же публикует работу, в которой формулирует и доказывает этот новый общий принцип, а в заключение добавляет: «Теоремы, предложенные X-м и Y-м, вполне могут рассматриваться как частные случаи нашего общего принципа, поскольку…»

Ну что ж, я тут не исключение. Поэтому я хочу сначала указать на некоторые свойства машин Мак-Каллоха, которых, как мне кажется, не заметили ни сам Мак-Каллох, ни Крейг, ни Фергюссон, после чего я попытаюсь сделать некоторые обобщения.

Первое, что больше всего поразило меня при нашем обсуждении работы второй машины Мак-Каллоха, было то, что после введения правила 4 (правило повторения) мы уже больше не нуждаемся в правиле 2 (правило ассоциата) для того, чтобы получить принцип Крейга и законы Фергюссона! В самом деле, рассмотрим машину, в которой используются только правила 1 и 4. Для такой машины мы всегда можем найти некое число *X*, которое порождает само себя; можем также найти такое число, которое порождает повторение самого себя; задавая произвольное число *A*, мы можем найти такое число *X*, которое порождает *AX;* наконец, мы можем найти число *X*, которое порождает повторение числа *AX* или же повторение повторения *AX*. Кроме того, используя машину Мак-Каллоха, из которой выведено правило 2, мы можем найти такое число *X*, которое порождает обращение самого себя, или число *X*, которое порождает повторение своего собственного обращения, или же число *X*, которое порождает обращение числа *AX*, или, наконец, число *X*, которое порождает повторение обращения числа *AX*. Далее, рассмотрим машину, в которой используются предложенные Мак-Каллохом правила 1, 2 и 4 (за исключением правила 3, то есть правила обращения). При такой машине у нас имеются два различных способа построения числа, которое порождает ассоциат самого себя, два способа построения числа, которое порождает свое собственное повторение; наконец, два способа построения числа, порождающего ассоциат своего повторения или повторение ассоциата самого себя.

Наконец, если у нас имеется произвольная машина, в которую заложены лишь правила 1 и 4, то принцип Крейга и законы Фергюссона продолжают выполняться и в этом случае. Таким образом, если бы мы вместо правила 2 воспользовались правилом 4, то для большинства задач, о которых шла речь в двух предыдущих главах, мы вполне могли бы получить альтернативные решения. (Понятно ли читателю, как все это можно сделать? Если нет, то можно обратиться к приведенным далее пояснениям.)

Я мог бы рассказать еще о многом, но лучше, пожалуй, будет сформулировать мои основные замечания в виде трех теорем.

Теорема 1. Закон Мак-Каллоха (который, как известно, гласит, что при любом А существует некое число *X*, которое порождает число *AX*) оказывается справедливым не только для машин, подчиняющихся правилам 1 и 2, но и для машин, подчиняющихся правилам 1 и 4.

Теорема 2. Любая машина, которая подчиняется закону Мак-Каллоха, подчиняется также и двум принципам Крейга.

Теорема 3. Любая машина, которая подчиняется одновременно второму принципу Крейга и правилу 1, должна подчиняться также и всем законам Фергюссона.

Не сообразит ли читатель, как доказать все эти теоремы?

Решения

Рассмотрим сначала произвольную машину, которая подчиняется правилам 1 и 4. Как известно, при любом *X* число 52*X* порождает число *XX;* поэтому если выбрать в качестве *X* число 52, то мы получим, что число 5252 порождает число 5252. Итак, у нас есть число, которое порождает само себя. Кроме того, число 552552 порождает повторение самого себя. Далее, чтобы для любого А найти число *X*, которое порождает АХ, возьмем в качестве *X* число 52*A*52 (в самом деле, оно порождает повторение числа *A*52, которое есть число *A*52*A*52, то есть число АХ). Тем самым мы доказали теорему 1. (Если мы хотим найти число *X*, которое порождает повторение *AX*, то в качестве *X* следует взять число 552*A*552.)

А теперь рассмотрим машину, которая подчиняется выведенным Мак-Каллохом правилам 1, 3 и 4. Числом, порождающим обращение самого себя, является, например, число 452452 (оно порождает обращение повторения числа 452, или, другими словами, обращение числа 452452). (Сравните его с предыдущим решением 43243.) Числом, которое порождает повторение обращения самого себя, является число 54525452. (Сравните его с прежним решением 5432543.)

Далее, рассмотрим машину, которая подчиняется правилам 1, 2 и 4. Мы знаем, что число 33233 порождает свой собственный ассоциат точно так же, как и число 352352. Что касается числа *X*, порождающего повторение самого себя, то у нас уже имеются два решения — это числа 35235 и 552552. Что же касается числа *X*, порождающего ассоциат повторения самого себя, то одним решением служит число 3532353; другим — число 35523552. Наконец, для числа, которое порождает повторение своего собственного ассоциата, также существуют два решения — это число 5332533 или число 53525352.

Наконец, рассмотрим некоторую произвольную машину, которая подчиняется по меньшей мере двум из правил Мак-Каллоха, а именно: правилам 1 и 4. Для заданного операционного числа *M* числом *A*, порождающим *M(X)*, оказывается число *M*52*M*52. (Сравните его с прежним решением — числом *M*32*M*3, полученным для машины, в которой вместо правила 4 используется правило 2.) Если теперь задано операционное число *M* и некое число *A*, то числом *X*, порождающим *M(AX)*, будет число *M*52*AM*52. (Сравните его с прежним решением — *M*32*AM*3.) Построенные решения показывают нам, что оба принципа Крейга могут быть получены на основании правил 1 и 4. Впрочем, я сформулировал гораздо более общее утверждение, а именно: для того чтобы получить принципы Крейга, достаточно одного только закона Мак-Каллоха (теорема 2). Это утверждение можно доказать тем же способом, который использовался нами в гл. 10. В самом деле, для любого заданного операционного числа *M* существует некое число *Y*, которое порождает *MY;* отсюда ясно, что число *MY* порождает *M(MY)*. Поэтому число *X* порождает *M(X)*, где *X* = *MY*. Точно так же для любого числа A, если имеется некоторое число *Y*, порождающее AMY, число *MY* порождает *M(AMY)* и, следовательно, число *X* порождает *M(AX)* при *X* = *MY*.

Что же касается теоремы 3, то ее можно доказать так же, как это делалось в предыдущей главе. [Например, если даны операционные числа *M* и *N* и если выполняется второй принцип Крейга, то существует некое число *X*, которое порождает M(*N*2*X*). Если теперь мы обозначим число *N*2*X* через *Y*, то получим, что число *X* порождает *M(Y)*, а число *Y* порождает *N(X)*.]

13. Ключ

Дело, по которому Крейг поехал в Норвегию, заняло у него гораздо меньше времени, чем он предполагал, и ровно через три недели инспектор возвратился домой. Дома его ждала записка от Мак-Каллоха:

> Дорогой Крейг!
>
> Если ты случайно вернешься из Норвегии до 12 мая (это пятница), то приходи ко мне в этот день обедать. Фергюссона я уже пригласил.
>
> С приветом
>
> Норман Мак-Каллох

— Вот и отлично! — сказал себе Крейг. — Я вернулся как раз вовремя!

Крейг приехал к Мак-Каллоху минут через пятнадцать после того, как там появился Фергюссон.

— С благополучным возвращением! — приветствовал приятеля Мак-Каллох.

— Пока вас не было, — сразу же сообщил Фергюссон, — Мак-Каллох изобрел новую числовую машину!

— Ну да? — удивился Крейг.

— Я занимался этим не один, — сказал Мак-Каллох, — Фергюссон тоже приложил к ней руку. А вообще-то машина интересная; на этот раз в нее введены следующие четыре правила:

правило MI: для любого числа X число $2X2$ порождает X;

правил о MII: если число X порождает число Y, то число $6X$ порождает число $2Y$;

правило MIII: если число X порождает число Y, то число $4X$ порождает число $\overleftarrow{Y}$ (как и в случае предыдущей машины);

правило MIV: если число X порождает число Y, то число $5X$ порождает число YY (как и в случае предыдущей машины).

— Эта машина, — продолжал Мак-Каллох, — обладает всеми прекрасными свойствами моей последней машины — она подчиняется двум твоим принципам и, кроме того, закону двойных аналогов Фергюссона.

Крейг довольно долго и внимательно изучал эти правила. Наконец он сказал:

— Что-то мне никак не удается сдвинуться с места. Не могу даже найти число, которое порождает само себя. Есть тут такие числа?

— Есть, — ответил Мак-Каллох, — но с помощью этой машины найти их гораздо труднее, чем в предыдущем случае. Честно говоря, я тоже не смог решить эту задачу. А вот Фергюссон с ней справился. Более того, теперь мы знаем, что такое короткое число, порождающее само себя, состоит из десяти цифр.

Крейг опять глубоко задумался.

— А что, первых двух правил недостаточно для нахождения такого числа? — поинтересовался он наконец.

— Нет, конечно! — ответил Мак-Каллох. — Для получения этого числа нам необходимы все четыре правила.

— Удивительное дело, — пробормотал Крейг и вновь погрузился в глубокое раздумье.

— О господи! — вдруг воскликнул он, буквально подскочив на стуле. — Да ведь это же решение загадки сейфа!

— О чем это вы? — спросил Фергюссон.

— А-а, прошу прощения! Вы ведь не знаете, — сказал Крейг и поведал им всю историю с банковским сейфом из Монте-Карло.

— Надеюсь, вы понимаете, что наш разговор сугубо конфиденциальный, — заключил свой рассказ Крейг. — А теперь, Мак-Каллох, если ты дашь мне число, которое порождает само себя, то я сразу же смогу назвать комбинацию, которая откроет замок сейфа.

Итак, читателю предлагаются три задачи.

1) Какое число *X* порождает само себя в последней машине?

2) Какая комбинация открывает замок сейфа?

3) Как связаны между собой первые два вопроса?

Эпилог

Рано утром следующего дня Крейг, подыскав надежного человека, отправил в Монте-Карло пакет, адресованный Мартинесу, в котором была записана найденная им накануне кодовая комбинация. Курьер прибыл вовремя, и сейф был благополучно открыт.

Как и обещал Мартинес, совет директоров банка прислал Крейгу солидное денежное вознаграждение. Крейг настоял на том, чтобы разделить эти деньги с Мак-Каллохом и Фергюссоном. Свой успех трое друзей решили отпраздновать, заказав шикарный ужин в ресторане «У льва».

— А знаете, — сказал Крейг, отведав превосходного хереса. — Пожалуй, это было одно из самых интересных дел в моей практике. Подумать только, числовые машины, созданные из чисто интеллектуального любопытства, и вдруг оказывают такую неоценимую помощь на практике!

Решения

Сначала еще несколько слов о загадке сейфа из Монте-Карло. В последнем условии Фаркуса не говорится, что требуемая комбинация *у* непременно должна отличаться от комбинации *х*. Поэтому если предположить, что *х* и *у* представляют собой одну и ту же комбинацию, то указанное условие можно будет прочитать так: «Пусть комбинация *х* родственна по отношению к комбинации *х*, тогда если комбинация *х* блокирует замок, то комбинация *х* будет нейтральной; если же комбинация *х* оказывается нейтральной, то комбинация *х* блокирует замок». Однако невозможно, чтобы комбинация *х* одновременно была нейтральной и блокировала замок. Следовательно, если комбинация *х* родственна но отношению к *х*, тогда эта комбинация не может ни оказаться нейтральной, ни блокировать замок. А значит, она должна этот замок открывать! Таким образом, если мы сумеем найти комбинацию *х*, которая родственна самой себе, то такая комбинация *х* обязательно откроет нам замок.

Конечно, Крейг понял это еще задолго до того, как вернулся в Лондон. Но как найти комбинацию *х*, которая родственна самой себе? Именно на этот вопрос Крейг и не мог ответить до тех пор, пока судьба не столкнула его с третьей машиной Мак-Каллоха.

Оказывается, задача нахождения комбинации, которая, согласно условию Фаркуса, является родственной самой себе, по своей сути тождественна задаче нахождения числа, которое порождает само себя в последней машине Мак-Каллоха. Единственное существенное отличие заключается в том, что кодовые комбинации для замка — это цепочки букв, тогда как числовые машины работают с цепочками цифр. Однако первую задачу можно легко преобразовать ко второй, и наоборот, следующим простым приемом.

Во-первых, мы рассматриваем лишь комбинации из букв *Q*, *L*, *V*, *R* (совершенно очевидно, что только эти буквы играют в задаче существенную роль). Предположим теперь, что вместо этих букв мы будем использовать собственно цифры 2, 6, 4, 5 (то есть 2 вместо *Q*, 6 вместо *L*, 4 вместо *V* и 5 вместо *R*). Для удобства запишем это так:

$$
\begin{array}{cccc}
Q & L & V & R \\
2 & 6 & 4 & 5
\end{array}
$$

Теперь посмотрим, какой вид примут первые четыре условия Фаркуса, если мы запишем их не в буквах, а в цифрах.

(1). Для любого числа *X* число 2*X*2 является родственным числу *X*.

(2). Если число *X* родственно числу *Y*, то число 6*X* оказывается родственным числу 2*Y*.

(3). Если число *X* родственно числу *Y*, то число 4*X* родственно числу $\overleftarrow{Y}$.

(4). Если число *X* родственно числу *Y*, то число 5*X* родственно числу *YY*.

Сразу видно, что это — точно те же правила, которым подчиняется последняя машина Мак-Каллоха, с той лишь разницей, что вместо слова «порождает» используется слово «родственно». (Конечно, я мог бы воспользоваться словом «порождает» и в гл. 8, где речь шла об условиях Фаркуса, но тогда читателю было бы слишком уж легко обо всем догадаться!)

Позвольте мне сказать это еще раз и поточнее. Для любой комбинации *x*, состоящей из букв *Q*, *L*, *V*, *R*, мы будем обозначать через *x* число, которое получается при замене *Q* на цифру 2, *L* на цифру 6, *V* на цифру 4 и *R* на цифру 5. Например, если это комбинация вида *VQRLQ*, то *x* — число 42562. При этом мы будем называть число *x* *кодовым номером* комбинации *x*. (Кстати, идея приписывания логическим высказываниям специальных чисел — так называемых «гёделевых номеров» — принадлежит известному логику Курту Гёделю и известна под названием *гёделевой нумерации*. Она очень важна, как мы увидим в IV части нашей книги.)

Значит, мы можем окончательно сформулировать главную мысль последнего абзаца в таком виде: для любых комбинаций *x* и *y*, составленных из четырех букв *Q*, *L*, *V*, *R*, если, исходя из правил MI, MII, MIII и MIV, используемых в последней машине Мак-Каллоха, можно показать, что число *x* порождает число *y*, то тогда, исходя из первых четырех условий Фаркуса, можно показать и то, что комбинация *x* является родственной по отношению к комбинации *y*, и наоборот.

Таким образом, если мы находим число, которое должно порождать само себя в последней числовой машине Мак-Каллоха, то это число должно оказаться кодовым номером некой комбинации, родственной самой себе, причем эта комбинация будет открывать замок.

Но как же нам найти такое число N, которое, порождало бы само себя в нашей последней машине? Прежде всего будем искать некоторое число H, такое, чтобы для любых чисел X и Y, если число X порождает число Y, число HX порождало бы число $Y2Y2$. Если мы сумеем найти это число H, тогда при любом Y число $H2Y2$ будет порождать число $Y2Y2$ (потому что, согласно правилу MI, число $2Y2$ порождает число Y), а значит, число $H2H2$ будет порождать число $H2H2$; тем самым мы получим искомое число N. Но как найти число H?

Эта задача сводится к следующей: как, исходя из заданного числа Y и последовательно применяя операции, которые способна выполнять наша машина, получить число $Y2Y2$? Так вот, построить число $Y2Y2$ из числа Y можно следующим способом: сначала построить обращение числа Y, получив число $\bar{Y}$; затем слева от $\bar{Y}$ приписать цифру 2, получив тем самым число $2\bar{Y}$; далее построить обращение числа $2\bar{Y}$, получив число $Y2$; наконец, построить повторение числа $Y2$, получив число $Y2Y2$. Эти операции обозначаются соответственно операционными числами 4, 6, 4 и 5, поэтому в качестве H мы выберем число 5464.

Давайте проверим, подходит ли нам найденное число H. Пусть число X порождает число Y; тогда мы должны выяснить, действительно ли число $5464H$ порождает число $Y2Y2$. Но поскольку X порождает Y, то число $4X$ порождает число $\bar{Y}$ (в соответствии с правилом MIII); значит, число $64X$ порождает число $2\bar{Y}$ (в соответствии с правилом MII). Отсюда следует, что число $464X$ порождает число $Y2$ (в соответствии с правилом MIII), и, стало быть, число $5464X$ порождает число $Y2Y2$ (в соответствии с правилом MIV). Итак, мы получили, что если X порождает Y, то число HX в самом деле порождает число $Y2Y2$.

Теперь, когда число Я найдено, выберем число N равным H2H2, в результате мы получим число 5464254642, которое порождает само себя. (Читатель может легко убедиться в этом самостоятельно.)

Но раз число 5464254642 порождает само себя, то, значит, это и есть кодовый номер той комбинации, которая открывает замок сейфа. Ясно, что указанная комбинация имеет вид *RVLVQRVLVQ*.

Конечно, задачу о сейфе из Монте-Карло можно решить и не преобразовывая ее в задачу для числовой машины, однако я привел здесь это решение по двум причинам. Во-первых, именно так решал во времени эту задачу сам Крейг, а во-вторых, я подумал, что читателю будет интересно увидеть, как две математические задачи могут иметь разное содержание, но одну и ту же абстрактную форму.

Для того чтобы непосредственно убедиться в том, что комбинация *RVLVQRVLVQ* является родственной по отношению к самой себе (а значит, и открывает замок), будем рассуждать следующим образом. Комбинация *QRVLVQ* родственна по отношению к комбинации *RVLV* (согласно свойству *Q*), поэтому комбинация *VQRVLVQ* будет родственной по отношению к обращению комбинации *RVLV* (согласно свойству *V*), то есть к комбинации *VLVR*. Значит, комбинация *LVQRVLVQ* родственна по отношению к комбинации *QVLVR* (согласно свойству *L*), и, следовательно, комбинация *VLVQRVLVQ* оказывается родственной по отношению к обращению комбинации *QVLVR*, то есть комбинации *RVLVQ*. Тогда (согласно свойству *R*) комбинация *RVLVQRVLVQ* будет родственной по отношению к повторению комбинации *RVLVQ*, то есть к комбинации *RVLVQRVLVQ*. Итак, комбинация *RVLVQRVLVQ* действительно является родственной самой себе.

Часть четвертая. Разрешима или неразрешима наша задача?

14. Логическая машина Фергюссона

Через несколько месяцев после того, как была с блеском разрешена загадка банковского сейфа в Монте-Карло, Крейг и Мак-Каллох наконец-то навестили Фергюссона — их очень заинтересовала его логическая машина. Разговор скоро зашел о сущности доказуемости.

— Я расскажу вам интересную и весьма поучительную историю, — сказал Фергюссон. — На экзамене по геометрии одного студента попросили доказать теорему Пифагора. Он сдал свою работу преподавателю, но тот возвратил ее с пометкой: «Это не доказательство!» Молодой человек пошел к преподавателю и сказал: «Сэр, как вы можете утверждать, будто то, что я вам сдал, — не доказательство? За весь курс лекций вы ни разу не дали нам определения доказательства. Вы давали нам строгие определения таких геометрических понятий, как треугольник, квадрат, окружность, параллельность, перпендикулярность и т. д., однако никогда не привели нам точного определения того, что же вы называете доказательством. Как же теперь вы можете так уверенно заявлять, будто мое доказательство — вовсе не доказательство? Как вы можете доказать, что оно не является доказательством?»

— Блестяще! — воскликнул Крейг, захлопав в ладоши. — Этот юноша далеко пойдет. А что же ответил преподаватель?

— К сожалению, — усмехнулся Фергюссон, — преподаватель оказался сухим педантом без чувства юмора и воображения. Он снизил студенту оценку за непочтительность.

— Очень жаль, — с досадой сказал Крейг. — Окажись я на месте преподавателя, непременно поставил бы этому студенту высший балл.

— Разумеется, — согласился Фергюссон, — я бы поступил точно так же. Но вы же прекрасно знаете, как часто преподаватели, лишенные творческого начала, побаиваются способных студентов.

— Должен признаться, — сказал Мак-Каллох, — что на месте этого преподавателя я бы тоже не смог ответить на вопрос студента. Разумеется, я похвалил мы его за толково поставленный вопрос, но ответить на него я бы все-таки не смог. В самом деле, что такое доказательство? Когда я сталкиваюсь с правильным доказательством, я почему-то всегда понимаю, что оно правильно; когда мне попадаются слабые аргументы, я обычно могу их указать. Но если бы меня попросили дать строгое определение доказательства, я тоже оказался бы в весьма затруднительном положении.

— Точно так же, как и почти все работающие математики, — поддержал Мак-Каллоха Фергюссон. — В девяносто девяти процентах случаев они вполне могут распознать правильность доказательства или указать на слабые места в неправильном доказательстве, однако не и состоянии привести точное определение доказательства. Нас же, логиков, интересует прежде всего анализ самого понятия «доказательство» — ведь мы хотим определить его так же строго, как и любое другое математическое понятие.

— Но раз большинство математиков все же понимают, что такое доказательство, хотя и не могут дать его четкого определения, то так ли уж важно искать его? — заметил Крейг.

— Важно, и по нескольким причинам, — ответил Фергюссон. — Но даже не будь этих причин, я все равно котел бы знать это определение ради самого определения. В истории математики часто случалось, что какие-то основные понятия, например понятие непрерывности, интуитивно понимались и осваивались еще задолго до того, как для них было введено строгое определение. Однако, получив четкое определение, данное понятие как бы переходит в новую категорию. Становится возможным установить связанные с ним факты, которые было бы очень трудно или вовсе невозможно открыть, не зная совершенно четко объема этого понятия. В этом смысле не является исключением и понятие «доказательство». Так, иногда случается, что в доказательстве используется какой-нибудь новый принцип — например аксиома выбора — и при этом часто возникает сомнение, является ли применение этого принципа законным. Так вот, строгое определение понятия «доказательство» позволяет точно указать, какие математические принципы можно использовать, а какие нельзя.

С другой стороны, особенно важно иметь точное определение доказательства тогда, когда нужно установить, что данное математическое утверждение недоказуемо в той или иной системе аксиом. Данная ситуация очень похожа на положение дел с построением при помощи циркуля и линейки в евклидовой геометрии: там, для того чтобы показать, что некое построение (например, трисекция угла, квадратура круга или удвоение куба[6]) невозможно, требуется обычно более критическое определение понятия «построение», чем для того, чтобы показать, например, что то или иное геометрическое построение с помощью циркуля и линейки действительно возможно. То же самое происходит и с доказуемостью: чтобы продемонстрировать, что данное утверждение недоказуемо в некоторой исходной системе аксиом, требуется гораздо более строгое и критическое определение самого понятия «доказательство», чем для получения соответствующего положительного результата, а именно что данное утверждение в самом деле является доказуемым при принятии той или иной аксиомы.

Загадка Гёделя

— Итак, — продолжал Фергюссон, — если задана некоторая система аксиом, то доказательство в данной системе представляет собой конечную последовательность высказываний, построенную по очень строгим правилам. При этом оказывается совсем несложно чисто механическим путем решить, является ли данная последовательность высказываний доказательством в этой системе или нет. Собственно говоря, совсем несложно даже придумать машину, которая может это делать. Гораздо труднее оказывается создать такую машину, которая могла бы решать, какие высказывания в данной системе аксиом доказуемы, а какие нет.

— Ответ, я полагаю, зависит от выбора исходной системы аксиом…

— Сейчас меня интересуют вопросы механического доказательства теорем, то есть вопросы создания таких машин, которые могли бы доказывать различные математические истины. Вот, например, мое последнее детище, — сказал Фергюссон, с гордостью указав на какое-то престранное сооружение.

Крейг и Мак-Каллох несколько минут разглядывали машину, пытаясь разгадать ее назначение.

— И что же она умеет? — спросил наконец Крейг.

— Она может доказывать различные утверждения, касающиеся положительных целых чисел, — ответил Фергюссон. — Я использую язык, в котором имеются имена для разных множеств чисел, — точнее, подмножеств положительных целых чисел. При этом существует бесконечно много таких числовых множеств, которые поддаются наименованию на этом языке. Например, у нас имеются специальные названия для множества четных чисел, для множества нечетных чисел, для множества простых чисел, для множества чисел, делящихся на 3, и т. д. — вообще, можно сказать, что практически любое множество чисел, которое могло бы представить интерес для специалиста по теории чисел, обладает своим именем на этом языке. И хотя сама совокупность числовых множеств, поддающихся описанию на этом языке, содержит бесконечно много элементов, она (по мощности. — *Перев.*) будет все же не больше, чем множество всех положительных чисел. С каждым положительным целым числом n оказывается связанным определенное множество чисел An, имеющее имя на нашем языке — это позволяет представить себе, что все именуемые множества расположены в виде последовательности A_1, A_2…, A_n… (Если хотите, можете вообразить себе, например, книгу с бесконечным числом страниц, причем для каждого целого положительного n на соответствующей n-й странице приведено описание того или иного множества положительных целых чисел. Тогда система A_n — это множество, описанное на n-й странице этой книги.)

Введем теперь математический символ $\in$, который означает «принадлежит» или «является членом». Для каждого числа x и произвольного числа y мы можем сформировать утверждение $x \in A_y$, которое означает, что x принадлежит множеству A_y. Это единственный вид утверждений, которые воспринимает моя машина. При этом задача машины состоит в том, чтобы определить, какие числа каким поддающимся описанию множествам принадлежат.

Далее, каждое утверждение $x \in A_y$ имеет свой кодовый номер — число, которое, будучи записано в обычной десятичной системе счисления, состоит из цепочки единиц длиной x и следующей за ней цепочки нулей длиной y. Например, кодовый номер утверждения $3 \in A_2$ выглядит как 11100; кодовый номер утверждения $1 \in A_5$ имеет вид 100000. При этом кодовый номер утверждения $x \in A_y$, то есть число, состоящее из x единиц и следующих за ними у нулей, я буду обозначать символом $x*y$.

— Машина работает следующим образом, — продолжал Фергюссон. — Когда она обнаруживает, что число x принадлежит множеству A_y, то она отпечатывает число $x*y$, то есть кодовый номер утверждения $x \in A_y$. Если при этом машина печатает число $x*y$, то я говорю, что машина доказала утверждение $x \in A_y$. Кроме того, если машина способна напечатать число $x*y$, то я говорю, что утверждение $x \in A_y$ доказуемо (с помощью моей машины).

Наконец, я знаю, что моя машина всегда точна — в том смысле, что каждое утверждение, которое можно доказать с ее помощью, является истинным.

— Минуточку, — вмешался Крейг. — Что значит «является истинным»? Какая разница между «является истинным» и «доказуемо»?

— Да это же совершенно разные вещи, — объяснил Фергюссон. — Я говорю, что утверждение $x \in A_y$ истинно, если x действительно является элементом множества A_y. Если же оказывается, что машина способна напечатать число $x*y$, тогда я говорю, что утверждение $x \in A_y$ доказуемо с помощью моей машины.

— Вот теперь ясно, — сказал Крейг. — Другими словами, утверждая, что ваша машина точна — или, иначе, что каждое утверждение, доказуемое с помощью машины, является истинным, — вы имеете в виду, что ваша машина никогда не напечатает число $x*y$, если x в действительности не принадлежит множеству A_y. Правильно я понял?

— Совершенно верно! — ответил Фергюссон.

— Скажите, а почему вы так уверены, что машина всегда точна? — спросил Крейг.

— Чтобы ответить на этот вопрос, я должен рассказать о ней более подробно, — ответил Фергюссон. — Дело в том, что машина работает на основе определенных аксиом относительно положительных целых чисел; эти аксиомы запрограммированы в машине в виде неких команд. Все эти аксиомы представляют собой хорошо известные математические истины. При этом машина не может доказать какое-либо утверждение, если оно не вытекает логически из этих аксиом. Но поскольку все аксиомы истинны, а любое логическое следствие из истинных утверждений тоже является истинным, то, стало быть, машина не способна доказать ложное утверждение. Если хотите, я могу перечислить эти аксиомы, и вы убедитесь сами, что машина действительно может доказывать только истинные утверждения.

— Сначала я хотел бы выяснить вот что, — сказал Мак-Каллох. — Допустим на некоторое время, что любое утверждение, доказуемое с помощью вашей машины, на самом деле является истинным. Значит ли это, что любое истинное утверждение вида $x \in A_y$ доказуемо с ее помощью? Иначе говоря, способна ли ваша машина доказывать все истинные утверждения типа $x \in A_y$ или только некоторые из них?

— Это очень важный вопрос, — ответил Фергюссон, — но, увы, ответа на него я не знаю. В этом-то как раз и состоит главная проблема, которую я никак не могу разрешить! Уже не один месяц я пытаюсь найти ответ на этот вопрос, но пока безуспешно. Так, я совершенно точно знаю, что моя машина может доказать любое утверждение вида $x \in A_y$, которое является логическим следствием заложенных в нее аксиом, однако я не знаю, достаточное ли количество аксиом введено мною в машину. Аксиомы, о которых идет речь, представляют собой нечто вроде общей суммы сведений, известных математикам относительно системы положительных целых чисел; и все же, может быть, их недостаточно, чтобы строго установить, какие же числа x и к каким поддающимся описанию множествам A_y принадлежат. До сих пор любое утверждение вида $x \in A_y$, которое я считал истинным, исходя из чисто математических соображений, оказывалось логическим следствием заложенных в машину аксиом; при этом машина способна доказать любое взятое мною утверждение такого вида. Однако то, что я не сумел найти истинного утверждения, которое машина не могла бы доказать, вовсе не означает, что такого утверждения не существует — может быть, я его просто еще не обнаружил. В то же время вполне может оказаться, что машина действительно способна доказать все истинные утверждения — но этого я тоже еще не сумел доказать. Пока я просто не знаю, как это сделать!

Короче говоря, после этого Фергюссон подробно объяснил Крейгу и Мак-Каллоху, какие аксиомы заложены в машину и какие чисто логические правила позволяют доказывать новые утверждения на основании уже имеющихся. Все эти подробности вполне убедили Крейга и Мак-Каллоха в том, что машина на самом деле точна — что она действительно доказывает лишь истинные утверждения. Однако вопрос о том, может ли машина доказать все истинные утверждения или только некоторые из них, так и остался нерешенным. На протяжении нескольких последующих месяцев они часто собирались вместе для детального обсуждения возникших вопросов — пока, наконец, задача не была полностью решена.

Я не стану утомлять читателя и приводить все подробности полученного ими решения; упомяну лишь о том, что действительно представляется для нас важным. Переломный момент в их исследованиях наступил тогда, когда друзья в конце концов сумели сформулировать три ключевые особенности машины; этого оказалось достаточно для полного решения задачи. Кажется, первыми обратили внимание на эти особенности Крейг и Мак-Каллох, однако их окончательная формулировка принадлежит Фергюссону. Но прежде чем перейти к описанию особенностей машины. я позволю себе сделать небольшое отступление.

Для любого множества A положительных целых чисел, под его *дополнением* $\bar{A}$ понимается множество положительных целых чисел, не входящих в A. Например, если A — множество четных чисел, то его дополнением $\bar{A}$ будет множество нечетных чисел; если A — множество чисел, делящихся на 5, то $\bar{A}$ — это множество чисел, которые на 5 не делятся.

Для любого множества A положительных целых чисел под A^* мы будем подразумевать множество всех положительных целых чисел x, для которых x^*x является элементом множества A. Поэтому для любого числа x выражение «число x принадлежит множеству A^*» эквивалентно выражению «число x^*x принадлежит множеству A».

А теперь перечислим три главные особенности данной машины, которые были обнаружены Крейгом и Мак-Каллохом.

Свойство 1. Множество A_8 — это множество всех чисел, которые машина может напечатать.

Свойство 2. Для любого положительного целого числа n множество $A_{3\cdot n}$ является дополнением множества A_n. (При этом под символом $3\cdot n$ мы понимаем 3, умноженное на n.)

Свойство 3. Для любого положительного целого числа n множество $A_{3\cdot n+1}$ представляет собой множество A_n^* (то есть множество всех чисел x, для которых число x^*x принадлежит множеству A_n).

1. С помощью свойств 1–3 можно, оказывается, строго показать, что машина Фергюссона не способна доказать все истинные утверждения. Читателю предлагается найти такое утверждение, которое является истинным, но при этом не может быть доказано с помощью этой машины. Иначе говоря, мы должны найти такие числа n и m (они могут быть как одинаковыми, так и разными), для которых кодовый номер утверждения $n \in A_m$ — то есть число n*m — не мог бы быть напечатан машиной, но чтобы при этом число n являлось бы элементом множества A_m.

2. В решении задачи 1, которое приведено ниже, числа n и m оба меньше 100. Имеется и другое решение этой задачи, для которого числа n, m также оказываются меньше 100 (при этом они опять могут быть как одинаковыми, так и разными). Сумеет ли читатель найти это решение?

3. Если не ограничивать сверху величину чисел n и m, то сколько всего решений может быть у такой задачи? Иначе, сколько существует истинных утверждений, которые недоказуемы с помощью машины Фергюссона?

Заключение

Фергюссон вовсе не хотел отказываться от идеи создания такой машины, которая могла бы доказывать арифметические истины, не будучи в состоянии доказывать ложные заключения, поэтому он напридумывал целую кучу таких логических машин.[7] Однако для каждой новой машины либо он сам, либо Крейг с Мак-Каллохом все-таки находили такое истинное утверждение, которое машина доказать не могла. Поэтому в конце концов Фергюссон отказался от мысли сконструировать чисто механическое устройство, которое было бы одновременно и точным (в указанном выше смысле. — *Перев.*), и могло бы доказать любое истинное арифметическое утверждение.

Итак, все героические попытки Фергюссона не увенчались успехом, однако причина этого заключалась отнюдь не в недостатке авторской изобретательности. Мы не должны забывать о том, что он жил за несколько десятилетий до знаменитых открытий таких известных логиков, как Гёдель, Тарский, Клини, Тьюринг, Пост, Черч и другие ученые, о работах которых у нас вот-вот пойдет речь. Если бы Фергюссон дожил до этих открытий, то он понял бы, что неудачи его обусловлены исключительно тем, что он пытался создать нечто по сути своей совершенно невозможное! Поэтому, отдав должное Фергюссону и его коллегам Крейгу и Мак-Каллоху, распрощаемся с ними и перенесемся на три-четыре десятилетия вперед, в переломный 1931 год.

Решения

1. Одно из решений состоит в следующем: утверждение $75 \in A_{75}$ является истинным, но не может быть доказано машиной. И вот почему.

Допустим, что утверждение $75 \in A_{75}$ ложно. Тогда число 75 не принадлежит множеству A_{75}. Следовательно, это число должно принадлежать множеству A_{25} (согласно свойству 2, множество A_{75} является дополнением множества A_{25}). Это означает (согласно свойству 3), что число 75*75 принадлежит множеству A_8, поскольку $25 = 3\times8 + 1$, и, следовательно, машина может напечатать число 75*75. Иначе говоря, это означает, что утверждение $75 \in A_{75}$ может быть доказано машиной. Таким образом, если бы утверждение $75 \in A_{75}$ было ложным, то оно вполне могло бы быть доказано машиной. Однако нам известно по условию, что машина точна и никогда не доказывает ложные утверждения. Поэтому утверждение $75 \in A_{75}$ не может оказаться ложным, и, стало быть, оно должно быть истинным.

Далее, поскольку утверждение $75 \in A_{75}$ истинно, то число 75 действительно принадлежит множеству A_{75}. Поэтому оно не может принадлежать множеству A_{25} (согласно свойству 2), и, следовательно, число 75*75 в свою очередь не может принадлежать множеству A_8, поскольку если бы это было так, то тогда, согласно свойству 3, число 75 принадлежало бы множеству A_{25}. Поскольку ясно, что число 75*75 не принадлежит множеству A_8, то утверждение $75 \in A_{75}$ не может быть доказано машиной. Итак, утверждение $75 \in A_{75}$ является истинным, но оно недоказуемо с помощью машины.

2. Прежде чем рассматривать другие решения, установим следующий факт весьма общего свойства. Пусть для всего дальнейшего ключевым является множество K — это множество всех чисел x, для которых утверждение $x \in A_x$ недоказуемо машиной, или, что то же самое, множество таких чисел x, для которых число $x*x$ не может быть напечатано машиной. Далее, множество A_{75} как раз и есть такое множество K, потому что утверждение, что x принадлежит множеству A_{75}, равносильно утверждению, что x не принадлежит множеству A_{25}, что в свою очередь равносильно утверждению, что число $x*x$ не принадлежит множеству A_8, где A_8 — это множество тех чисел, которые машина может напечатать. Итак, $A_{75} = K$. Но при этом и $A_{73} = K$, потому что утверждение, что некое число x принадлежит множеству A_n, равносильно утверждению, что число $x*x$ принадлежит множеству A_8 (согласно свойству 3, поскольку $73 = 3\times24 + 1$), что в свою очередь равносильно утверждению, что число $x*x$ не принадлежит множеству A_8 (согласно свойству 2). Таким образом, A_{73} — это множество всех тех чисел x, для которых число $x*x$ не принадлежит множеству A_8 или, что то же самое, множество всех чисел x, для которых утверждение $x \in A_x$ не может быть доказано машиной. Следовательно, A_{73} — это то же самое множество чисел, что и A_{75}, поскольку оба они тождественны множеству K. Более того, для любого заданного числа n, для которого $A_n = K$, утверждение $n \in A_n$ должно быть истинным, но недоказуемым с помощью машины. Это можно показать буквально с помощью тех же самых рассуждений, что и в рассмотренном нами частном случае $n = 75$ (в еще более общей форме эти рассуждения приведены в следующей главе). Тем самым мы получаем, что утверждение $73 \in A_{73}$ —

это еще один пример истинного утверждения, кодовый номер которого машина напечатать не может.

3. Для любого числа *n* множество $A_{9 \cdot n}$ должно совпадать с множеством *n*. В самом деле, множество $A_{9 \cdot n}$ есть дополнение множества $A_{3 \cdot n}$, а множество $A_{3 \cdot n}$ в свою очередь есть дополнение множества A_n; следовательно, множество $A_{9 \cdot n}$ совпадает с A_n. Это означает, что множество A_{675} совпадает с множеством A_{75}, и, стало быть, утверждение $675 \in A_{675}$ — это есть еще одно решение задачи. Аналогично утверждение $2175 \in A_{2175}$ также является решением. Таким образом, мы получаем, что существует бесконечно много истинных утверждений, которые машина Фергюссона доказать не может: например, для любого *n*, которое равно произведению 75 на некоторое кратное числа 9 или произведению 73 на произвольное кратное числа 9, утверждение $n \in$ А, является истинным, но недоказуемым посредством этой машины.

15. Доказуемость и истина

Крупной вехой в истории математической логики стал 1931 г. Именно в этом году Гёдель опубликовал знаменитую теорему о неполноте. Свою эпохальную работу[8] он начинает следующими словами:

«Развитие математики в направлении все большей точности привело к формализации целых ее областей, в связи с чем стало возможно проводить доказательства, пользуясь небольшим числом чисто механических правил. В настоящий момент наиболее исчерпывающими системами являются, с одной стороны, система аксиом, предложенная Уайтхедом и Расселом в работе „Princlpia Mathematica“, а с другой — система Цермело — Френкеля в аксиоматической теории множеств. Обе эти системы настолько обширны, что в них оказывается возможным формализовать все методы доказательства, используемые сегодня в математике, — иначе говоря, все эти методы могут быть сведены к нескольким аксиомам и правилам вывода. Поэтому, казалось бы, разумно предположить, что указанных аксиом и правил вполне хватит для разрешения всех математических проблем, которые могут быть сформулированы в пределах данной системы. Ниже будет показано, что дело обстоит не так. В обеих упомянутых системах имеются сравнительно простые задачи из теории обычных целых чисел, которые не могут быть решены на базе этих аксиом».[9]

Далее Гёдель объясняет, что такая ситуация обусловлена отнюдь не какими-то специфическими особенностями двух упомянутых систем, но имеет место для обширного класса математических систем.

Что имеется в виду под «обширным классом» математических систем? Это выражение интерпретировалось по-разному, и соответственно по-разному обобщалась теорема Гёделя. Как ни странно, одно из самых простых и доступных для неспециалиста объяснений остается наименее известным. Это тем более удивительно, что на такое объяснение указывал и сам Гёдель во вводной части своей первой работы. К нему мы сейчас и обратимся.

Рассмотрим систему аксиом со следующими свойствами. Прежде всего пусть у нас имеются имена для различных множеств положительных целых чисел, причем все эти «именуемые», или допускающие наименование, множества мы можем расположить в виде бесконечной последовательности A_1, $A_2 \ldots$, $A_n \ldots$ (точно так же, как в системе Фергюссона, рассмотренной в предыдущей главе). Назовем число n

индексом именуемого множества A, если A=n. (Таким образом, если, например, множества A_2, A_7 и A_{13} совпадают между собой, то тогда числа 2, 7 и 13 — это все индексы одного и того же множества.) Как и для системы Фергюссона, с каждым числом *x* и с каждым числом y мы связываем утверждение, записываемое в виде $x \in A_y$, которое называется истинным, если *x* принадлежит A y, и ложным, если *x* не принадлежит A_y. Однако в дальнейшем мы не предполагаем, что утверждения типа $x \in A_y$ являются единственно возможными утверждениями в данной системе, поскольку могут существовать и другие. Предполагается также, что любое возможное утверждение обязательно классифицируется либо как истинное, либо как ложное.

Каждому утверждению в данной системе присваивается некий кодовый номер, который мы будем называть геделевым номером, причем гёделев номер утверждения $x \in A_y$ будем обозначать $x*y$. (Теперь уже нет нужды предполагать, что число $x*y$ состоит из цепочки единиц длиной *x*, за которой следует цепочка нулей длиной *y;* сам Гёдель фактически использовал совсем другую кодовую нумерацию. Можно пользоваться самыми разными видами кодовой нумерации, и какой вид оказывался более удобным — это зависит от конкретного вида рассматриваемой нами системы. Так или иначе, для доказательства той общей теоремы, которую мы скоро докажем, нет необходимости вводить какую-то конкретную гёделеву нумерацию.)

Определенные утверждения в данной системе принимаются как *аксиомы*; кроме того, вводятся также некие специальные правила, по которым можно на основании этих аксиом доказывать различные другие утверждения. Таким образом, в данной системе имеется вполне определенное свойство утверждения, называемое его *доказуемостью*. Далее предполагается, что система *правильна* в том смысле, что каждое доказуемое в этой системе утверждение является истинным; отсюда, в частности, следует, что если утверждение $x \in A_y$ доказуемо в данной системе, то число *x* действительно является элементом множества A_y.

Пусть *P* — это набор гёделевых номеров всех доказуемых в данной системе утверждений. Пусть опять же для любого множества чисел *A* его дополнение обозначается символом $\bar{A}$ (это множество всех чисел, не принадлежащих *A*). Наконец, через $A*$ мы будем обозначать множество всех чисел *x*, для которых число $x*x$ принадлежит *A*. При этом нас будут интересовать системы, для которых выполняются следующие три условия

G_1, G_2 и G_3:

Условие G_1. Множество *P* допускает наименование в данной системе. Иначе говоря, существует по крайней мере одно число *p*, для которого A_p представляет собой множество гёделевых номеров доказуемых утверждений. (Для системы Фергюссона таким *p* было число 8.)

Условие G_2. Дополнение любого множества, допускающего наименование в данной системе, также именуемо в этой системе. Иначе говоря, для любого числа *x* найдется такое число *x′*, для которого множество $A_{x'}$ является дополнением множества A_x. (Для системы Фергюссона таким *x′* было число $3 \cdot x$.)

Условие G_3. Для любого именуемого множества *A* множество *A** также именуемо в данной системе. Иначе говоря, для любого числа *x* всегда найдется такое число *x**, что множество A_x, — представляет собой, множество всех чисел *n*, для которых n*n принадлежит A_x. (Для системы Фергюссона таким *x** было число $3 \cdot x + 1$.)

Очевидно, что условия F_1, F_2 и F_3, характеризующие машину Фергюссона, представляют собой не более чем частные случаи условий G_1, G_2 и G_3. Последние имеют большое значение потому, что они действительно выполняются для самых разнообразных математических систем, в том числе и для тех двух систем, которые рассмотрены в работе Гёделя. Другими словами, оказывается возможным расположить все допускающие наименование множества в виде бесконечной последовательности A_1, $A_2\ldots$, $A_n\ldots$ и ввести для всех утверждений некоторую частную нумерацию Гёделя, причем так, что будут выполняться условия G_1, G_2 и G_3. В результате все то, что является доказуемым для систем, удовлетворяющих условиям G_1, G_2 и G_3, будет применимо ко многим другим важным системам. Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему Гёделя в общей форме.

Теорема G. *Для любой правильной системы, удовлетворяющей условиям* G_1, G_2 *и* G_3, *должно существовать утверждение, которое является истинным, но недоказуемым в данной системе.*

Доказательство теоремы G представляет собой простое обобщение доказательства, которое уже известно читателю для системы Фергюссона. Обозначим через *K* множество таких чисел *x*, для которых элемент *x*x* не принадлежит множеству *P*. Поскольку множество *P* (согласно условию G_1) именуемо в данной системе, то же можно сказать и о его дополнении $\bar{P}$

(согласно условию G_2), а следовательно, и о множестве $\overline{P}^*$ (согласно условию G_3). Но множество $\overline{P}^*$ совпадает с множеством K (поскольку $\overline{P}^*$ — это множество таких чисел x, для которых x^*x принадлежит $\overline{P}$, или, другими словами, множество таких чисел x, для которых элемент x^*x не принадлежит P). Таким образом, множество K допускает наименование в данной системе, откуда следует, что $K = A_k$ по крайней мере для одного числа k. (Для системы Фергюссона одним из таких значений k было число 73, другим — число 75.) Таким образом, для любого числа x истинность утверждения $x \in A_k$ равносильна утверждению, что число x^*x не принадлежит P, а это в свою очередь означает, что утверждение $x \in A_x$ недоказуемо (в данной системе). В частности, если мы возьмем в качестве x число k то истинность утверждения $k \in A_k$ будет равносильна его недоказуемости в данной системе, что означает либо истинность, но недоказуемость этого утверждения, либо его ложность, но доказуемость в той же системе. Но последняя возможность исключена, поскольку мы предположили, что наша система является правильной; следовательно, указанное утверждение истинно, но недоказуемо в данной системе.

Обсуждение. В своей предыдущей книжке «Как же называется эта книга?» я рассматривал аналогичную ситуацию — остров, все жители которого делятся на рыцарей, которые всегда говорят только правду, и плутов, которые всегда лгут. При этом некоторых рыцарей мы называли признанными рыцарями, а некоторых плутов — отъявленными плутами. (Все рыцари высказывают истинные суждения, а признанные рыцари высказывают утверждения, которые не только истинны, но и доказуемы.) Далее, ни один из жителей острова не может сказать: «Я не рыцарь» — ведь рыцари никогда не лгут и, стало быть, рыцарь не станет говорить, будто он не рыцарь; плут же никогда не скажет о себе правдиво, что он не рыцарь. Именно поэтому ни один из обитателей острова никак не может заявить, что он не рыцарь. Вместе с тем некий островитянин вполне может сказать: «Я непризнанный рыцарь». Противоречия в таком заявлении нет, однако вот что интересно: сказавший это наверняка должен быть рыцарем, но непризнанным рыцарем. Дело в том, что плут никак не может сделать правдивого заявления, что он непризнанный рыцарь (поскольку он и в самом деле им не является); стало быть, говорящий должен быть рыцарем. Но раз он рыцарь, то, значит, должен говорить правду; стало быть, он рыцарь, но, как он сам утверждает, — непризнанный рыцарь. (Точно так же высказывание $k \in A_k$ выдающее свою недоказуемость в данной системе, должно быть истинным, но недоказуемым в этой системе.)

Утверждения Гёделя и теорема Тарского

Рассмотрим теперь систему, удовлетворяющую условиям G_2; и G_3 (условие G_1 пока несущественно). Ранее мы определили *P* как множество гёделевых номеров всех утверждений, доказуемых в данной системе; пусть теперь *T* будет множеством гёделевых номеров всех *истинных* утверждений в этой системе. В 1933 г. логик Альфред Тарский поставил вопрос: «Именуемо ли множество T в данной системе или нет?» — и ответил на него. Ответ может быть получен на основе лишь условий G_2 и G_3. Однако, прежде чем говорить об этом, обратимся сначала к вопросу не меньшей важности — о системах, которые удовлетворяют по крайней мере условию G_3.

Для любого заданного утверждения *X* и любого множества положительных целых чисел *A* мы будем называть *X гёделевым утверждением* для A, если либо *X* истинно и его гёделев номер принадлежит *A*, либо *X* ложно и его гёделев номер не принадлежит *A*. (Подобное утверждение можно представлять себе как высказывание о том, что его собственный гёделев номер принадлежит A: если это утверждение истинно, то его гёделев номер действительно принадлежит A; если же оно ложно, то его гёделев номер не принадлежит *A*.) Далее, мы будем называть систему *гёделевой* в том случае, если для каждого множества *A*, допускающего наименование в этой системе, существует хотя бы одно гёделево утверждение для *A*.

При этом самым существенным для нас пунктом является следующая теорема.

Теорема C. *Если система удовлетворяет условию* G_3, *то эта система является гёделевой.*

1. Докажите теорему C.

2. В качестве частного случая рассмотрите систему Фергюссона. Найдите гёделево утверждение для множества A_{100}.

3. Предположим, что некоторая система является гёделевой (даже если она и не удовлетворяет условию G_3). Если эта система правильна и удовлетворяет условиям G_1, и G_2, то обязательно ли она содержит утверждение, которое является истинным, но недоказуемым в данной системе?

4. Пусть *T* — множество гёделевых номеров всех истинных утверждений. Существует ли гёделево утверждение для *T*? Существует ли гёделево утверждение для множества $\overline{T}$, то есть дополнения *T*?

Вот теперь мы наконец можем ответить и на вопрос, поставленный Тарским. В самой общей форме теорема Тарского формулируется следующим образом:

Теорема T. *Для любой заданной системы, удовлетворяющей условиям* G_2 *и* G_3, *множество T гёделевых номеров истинных утверждений не именуемо в данной системе.*

Примечание. Иногда слово «именуемо» заменяется словом «определимо», в результате чего теорему T формулируют так: для достаточно богатой системы истинность в ее рамках не определима в пой системе.

5. Докажите теорему T.

6. Следует отметить, что, доказав теорему T, мы сразу и в качестве непосредственного следствия получаем теорему G. Может ли читатель сообразить, как это сделать?

Двойственная форма доказательства Гёделя

Те системы, которые, как доказал Гёдель, являются неполными, обладают также следующим свойством: с каждым утверждением *X* связано утверждение *X'*, о называется *отрицанием X*, которое истинно в том только том случае, если утверждение *X* ложно. Далее, если *X'* — отрицание некоего утверждения *X* — доказуемо в данной системе, то само утверждение *X* называется *опровержимым* в данной системе. Если предположить, что система правильна, то ни одно ложно, утверждение в этой системе не будет доказуемо и ни одно истинное утверждение не будет в ней опровержимо.

Ранее мы убедились, что условия G_1, G_2 и G_3 влекут за собой существование некоего гёделева утверждения, или высказывания, G для множества, также что такое утверждение G является истинным, не. недоказуемым в данной системе (предполагая, конечно, что система правильна). Но поскольку G истинно, оно не может быть опровержимым в этой системе (опять, же в предположении правильности системы). Значит утверждение G в данной системе и не доказуемо, и неопровержимо. (Такое утверждение называется *неразрешимым* в данной системе.)

В своей монографии «Теория формальных систем»[10] (1960 г.) я рассматривал «двойственную» форму доказательства Гёделя, а именно: что будет, если вместо высказывания, утверждающего свою недоказуемость, построить высказывание, утверждающее свою опровержимость? Более строго эту проблему можно сформулировать так. Пусть R — множество гёделевых номеров опровержимых утверждений. Предположим, что X — гёделево утверждение для R. Что можно сказать о свойствах утверждения X?

Высказанная здесь идея развивается нами в следующей задаче.

7. Рассмотрим теперь правильную систему, которая удовлетворяет условию G_3, а вместо условий G_1, G_2 потребуем выполнения следующего условия.

Условие G'_1. Множество R именуемо в данной системе. (Таким образом, мы предполагаем, что система правильна и удовлетворяет условиям G_1 и G_3.)

а. Показать, что существует такое утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть в данной системе.

б. Рассмотрим следующий частный случай: пусть нам дано, что A_{10} — это множество R и что для любого числа n множество A_{5*n} представляет собой множество (таких чисел x, для которых число $x*x$ принадлежит A_n (здесь мы имеем частный случай условия G_3). Задача теперь состоит в том, чтобы найти утверждение, которое было бы и недоказуемым, и неопровержимым и данной системе, а также определить, является ли это утверждение истинным или ложным.

Примечания. 1. Гёделев метод получения неразрешимого утверждения сводится к построению гёделева утверждения для множества $\bar{P}$ — дополнения P; такое утверждение (его можно рассматривать как высказывание, утверждающее собственную недоказуемость) должно быть истинным, но недоказуемым в данной системе. Двойственный метод сводится к построению гёделева утверждения не для множества $\overline{P}$, а для множества *R;* такое утверждение (его можно рассматривать как высказывание, утверждающее собственную опровержимость) должно быть ложным, но неопровержимым. (Поскольку оно ложно, оно так же недоказуемо и, следовательно, неразрешимо в данной системе.) Следует отметить, что те системы, которые рассматриваются в оригинальной работе Гёделя, удовлетворяют всем четырем условиям — G_1, G_2, G_3 и G_1, так что для построения неразрешимых утверждений можно использовать как тот, как и другой метод.

2. Высказывание, которое утверждает собственную недоказуемость, можно сравнить со словами того обитателя острова рыцарей и плутов, который заявляет, будто он непризнанный рыцарь, точно гак же высказывание, утверждающее свою собственную опровержимость, можно уподобить словам такого обитателя острова, который заявляет, что он отъявленный плут; этот человек и в самом деле мошенник, но неотъявленный. (Предоставляю читателю возможность доказать это самому.)

Решения

1. Предположим, система действительно удовлетворяет условию G_3. Пусть *S* — любое множество, именуемое в данной системе. Тогда, согласно условию G_3, множество S^* тоже именуемо в этой системе. Значит, существует такое число *b*, для которого $A_b = S^*$. Далее, число *x* принадлежит множеству S^* только в том случае, если число $x{*}x$ принадлежит множеству *S*. Поэтому *x* принадлежит множеству A_b только в том случае, если $x{*}x$ принадлежит *S*. В частности, если в качестве *x* выбрать число *b*, то это число принадлежит; множеству A_b, только в том случае, если число $b{*}b$ принадлежит множеству *S*. Кроме того, число *b* принадлежит A_b в том и только том случае, если утверждение $b \in A_b$ истинно. Поэтому утверждение $b \in A_b$ истинно тогда и только тогда, когда $b{*}b$ принадлежит множеству *S*. Но число $b{*}b$ есть гёделев номер утверждения $b \in A_b$. Следовательно, мы имеем, что утверждение $b \in A_b$ будет истинным тогда и только тогда, когда гёделев номер этого утверждения принадлежит множеству *S*. Итак, если утверждение $b \in A_b$

истинно, то его гёделев номер принадлежит S; если ж это утверждение ложно, то его гёделев номер принадлежит S. Таким образом, утверждение $b \in A_b$ является гёделевым утверждением для S.

2. В системе Фергюссона при любом заданном числе n множество $A_{3 \cdot n+1}$ представляет собой множество A_n*. Поэтому множество A_{301} — это есть множество A_{100}*. Воспользуемся теперь результатом предыдущей задачи, положив b равным 301. Тогда утверждение $301 \in A_{301}$ будет гёделевым утверждением для множества A_{100}. Вообще для любого числа n, выбрав $b = 3 \cdot n+1$, мы получим, что утверждение $b \in A_b$, является гёделевым для множества A_n в системе Фергюссона.

3. Да. Предположим, что данная система является гёделевой и что условия G_1 и G_2 выполняются; предположим также, что система правильна. Согласно условию G_1, множество R именуемо в этой системе; поэтому, согласно условию G_1, именуемо также и множество $\overline{P}$ — дополнение P. Тогда, поскольку исходная система гёделева, то существует гёделево утверждение X для $\overline{P}$. Это означает, что X истинно в том и только том случае, если гёделев номер утверждения X принадлежит $\overline{P}$. Однако если гёделев номер утверждения X принадлежит $\overline{P}$, то тем самым он не принадлежит P, а это значит, что утверждение X недоказуемо. Таким образом, гёделево утверждение для $\overline{P}$ — это ни больше ни меньше как утверждение, которое истинно в том и только том случае, если оно недоказуемо в (данной системе, а такое утверждение (как мы уже видели) как раз и должно быть истинным, но недоказуемым в этой системе (если система правильна).

Итак, фактически суть доказательства Гёделя состоит в построении гёделева утверждения для множества $\overline{P}$.

4. Очевидно, что всякое утверждение X является гёделевым утверждением для множества T, потому что если X истинно, то его гёделев номер принадлежит T, а если оно ложно, то его гёделев номер не принадлежит T. Следовательно, ни одно утверждение не может оказаться гёделевым для $\overline{T}$, потому что не может существовать ни истинного утверждения X, гёделев номер которого принадлежал бы множеству $\overline{T}$, ни ложного утверждения X, гёделев номер которого не принадлежал бы множеству $\overline{T}$.

Читателю будет поучительно убедиться, что для любого множества чисел A и для любого утверждения X это X может являться гёделевым утверждением либо для A, либо для $\overline{A}$, но никак не для обоих множеств сразу.

5. Рассмотрим сначала произвольную систему, удовлетворяющую условию G_3. В соответствии с решением задачи 1 для любого множества, именуемого в рамках данной системы, существует гёделево утверждение. Кроме того, согласно решению задачи 4 не существует гёделева утверждения для множества $\overline{T}$. Следовательно, если система удовлетворяет условию G_3, то множество $\overline{T}$ не допускает имени в этой системе. Если система удовлетворяет к тому же условию G_3, то множество T не именуемо в этой системе — потому что ли бы это было так, то тогда, согласно условию G_3, допускало бы имя и его дополнение $\overline{T}$, что на самом деле не имеет места. Это доказывает, что в системе, удовлетворяющей условиям G_2 и G_3, множество T не именуемо.

Окончательно: а) если выполняется условие G_3, то множество $\overline{T}$ не именуемо в данной системе; б) если выполняются условия G_1 и G_3, то ни множество T, ни его дополнение $\overline{T}$ в этой системе не именуемы.

6. Как только теорема T доказана, теорему G можно получить следующим образом.

Предположим, что мы имеем правильную систему, удовлетворяющую условиям G_1; G_2 и G_3 — Из условий G_2 и G_3, согласно теореме T, следует, что множество T не допускает имени в данной системе. Но, согласно условию G_1, множество P допускает имя в данной системе. Поэтому раз P допускает имя в рамка системы, а T нет, то, значит, это должны быть разные множества. Однако каждое число, принадлежащее множеству P, входит также и в множество T, поскольку нам дано, что система является правильной в том смысле, что каждое доказуемое утверждение в ней истинно. Стало быть, поскольку множество T не совпадает с множеством P, в множестве T должно существовать хотя бы одно число n, которое не принадлежит P. Вместе с тем, поскольку это n принадлежит T, оно должно быть гёделевым номером некоего истинного утверждения X. Но поскольку это число n не принадлежит P, то утверждение X должно быть недоказуемым в данной системе. Значит, утверждение X истинно, но недоказуемо в данной системе. Итак, теорема G действительно имеет место.

7. Пусть теперь нам даны условия G'_1 и G_3.

а. Согласно условию G'_1, множество R именуемо в данной системе. Тогда, согласно условию G_3, множество R^* также допускает имя в рамках этой системы. Следовательно, существует такое число h, при котором $A_h = R^*$. Далее, по определению множества R^* число x принадлежит R^* в том и только том случае, если число $x{*}x$ принадлежит множеству R. Поэтому для любого x это x принадлежит A_h в том и только том случае, если число $x{*}x$ входит в множество R. В частности, если к качестве x выбрать h, то число h будет принадлежать, A_h в том и только том случае, если число $h{*}h$ входит в R. Далее, h принадлежит A_h в том и только том случае, если утверждение $h \in A_h$, истинно. С другой стороны, поскольку число $h{*}h$ есть гёделев номер утверждения $h \in A_h$, то $h{*}h$ входит в R в том и только в том случае, если утверждение $h \in A_h$ опровержимо. Значит, утверждение $h \in A_h$ истинно в том и только в том случае, если оно опровержимо. Отсюда следует, что данное утверждение либо истинно и опровержимо, либо ложно и неопровержимо. Однако оно не может быть истинным и опровержимым, поскольку наша система правильна по условию задачи; следовательно, оно должно быть ложным и неопровержимым. Наконец, раз это утверждение ложно, оно не может быть и доказуемым (опять же потому, что система правильна). Таким образом, утверждение $h \in A_h$, недоказуемо и неопровержимо (и, кроме того, оно ложно).

б. Пусть нам дано, что множество A_{10} — это R и что $A_{5 \cdot n}$ при любом числе n совпадает с множеством A_n^*. Значит, A_{50} есть множество R^*. Тогда, согласно решению «а», если принять $h = 50$, то утверждение $50 \in A_{50}$ будет недоказуемым и неопровержимым. Кроме того, это утверждение будет ложным.

16. Машины, рассказывающие о себе

Рассмотрим теперь доказательство Гёделя с несколько иной точки зрения, которая позволяет увидеть основную идею особенно ярко.

Возьмем четыре символа *P, N, A,* – и рассмотрим всевозможные комбинации этих символов. Произвольную комбинацию указанных символов мы будем называть выражением. Например, выражением является комбинация *P—NA–P;* точно так же выражением будет комбинация *–PN—A–P–*. Некоторым выражениям мы будем приписывать определенный смысл — такие выражения в дальнейшем будут называться *утверждениями*.

Предположим, что у нас имеется машина, которая может выдавать нам (распечатывать) одни выражения и не может выдавать другие. При этом те выражения, которые машина может напечатать, мы будем называть *допускающими распечатку*. Предполагается, что любое выражение, которое может напечатать машина, рано или поздно обязательно будет ею напечатано. Если нам задано выражение *X* и мы хотим высказать суждение, что *X* допускает распечатку, то будем записывать это как *P–X*. Так, например, запись *P–ANN* означает, что выражение *ANN* допускает распечатку (при этом неважно, является ли это утверждение истинным или ложным). Если же мы хотим сказать, что выражение *X* не допускает распечатки, то будем писать *NP–X*. (Символ *N* — от англ. not — отрицание «не», а символ *P* — от англ. printable — допускающий распечатку.) Таким образом, запись вида *NP–X* следует читать как «не допускающее распечатки *X*», или, что по существу то же самое, «выражение *X* не допускает распечатки».

Ассоциатом выражения *X* мы будем называть выражение *X–X;* при этом вместо слова «ассоциат» нами будет использоваться символ *A* (от англ. associate). Таким образом, если нам задано некоторое выражение *X* и мы хотим сказать, что ассоциат выражения *X* допускает распечатку, то будем записывать это как *PA–X*. Если мы теперь хотим сказать, что ассоциат утверждения *X* не допускает распечатки, то это будет записываться как *NPA–X*.

Читателя, быть может, удивляет, что мы используем тире в качестве своеобразного символа. В самом деле, почему, когда нам нужно высказать суждение о том, что выражение *X* допускает распечатку, вместо записи *P–X* не писать просто *PX*? Это делается для того, чтобы избежать определенной двусмысленности. В самом деле, что, например, может означать запись *PAN*, если мы откажемся от тире? Она может означать либо что ассоциат выражения *N* допускает распечатку, либо что допускает распечатку выражение *AN*. Если же мы пользуемся тире, то подобной двусмысленности не возникает. Так, если мы хотим сказать, что ассоциат выражения *N* допускает распечатку, то записываем этот факт как *PA–N;* если же хотим сказать, что допускает распечатку выражение *AN*, то пишем *P–AN*. Предположим теперь, нам нужно сказать, что выражение –*X* допускает распечатку. Правильно ли будет записать эту фразу как *P–X?* Нет, ведь запись *P–X* означает, что выражение *X* допускает распечатку. Поэтому чтобы сказать, что допускает распечатку выражение –*X*, нужно написать *P–X*.

Рассмотрим еще несколько примеров: запись *P*— означает, что – допускает распечатку, запись *PA*— означает, что выражение —– (ассоциат выражения –) допускает распечатку; запись *P*——– также означает, что —– допускает распечатку; запись *NPA—P–A* означает, что ассоциат выражения –P–A не допускает распечатки, или, другими словами, что не допускает распечатки выражение –P–A—P–A. То же самое означает и запись вида *NP—P–A—P–A.*

Утверждением будем называть любое выражение одного из следующих четырех типов: *P–X*, *NP–X*, *PA–X* или *NPA–X*, где *X* — любое выражение. Утверждение *P–X* мы будем называть истинным, если *X* допускает распечатку, и ложным, если *X* с допускает распечатки. Утверждение *NP–X* мы будем называть истинным, если *X* не допускает распечатки, и ложным, если *X* эту распечатку допускает, утверждение *PA–X* будет называться истинным, если ассоциат выражения *X* допускает распечатку, и ложным, если ассоциат этого *X* распечатки не допускает. Наконец, утверждение *NA–X* мы будем называть истинным, если ассоциат выражения *X* не допускает распечатки, и ложным, если ассоциат этого *X* распечатку допускает. Итак, мы дали точное определение истинности и ложности для утверждений всех четырех видов. Отсюда следует, что для любого выражения *X* справедливы:

Правило 1. Утверждение *P–X* истинно тогда и только тогда, когда выражение *X* допускает распечатку (на машине).

Правило 2. Утверждение *PA–X* истинно тогда и только тогда, когда выражение *X–X* допускает распечатку.

Правило 3. Утверждение *NP–X* истинно тогда и только тогда, когда выражение *X* не допускает распечатки.

Правило 4. Утверждение *NPA–X* истинно тогда и только тогда, когда выражение *X–X* не допускает распечатки

Удивительное дело! Машина печатает утверждения, которые представляют собой не что иное, как суждения о том, что она сама может и что не может напечатать! В этом смысле машина говорит о себе (или точнее, печатает утверждения о самой себе).

Пусть теперь нам известно, что машина на 100 % точна, то есть она не может выдать нам ложное утверждение, печатая только истинные утверждения. Отсюда вытекает ряд следствий. Например, если машина в один прекрасный день напечатает утверждение *P–X*, то, значит, она должна напечатать и выражение *X*, потому что раз она может напечатать утверждение *P–X*, то, стало быть, это утверждение истинно, а это означает, что выражение *X* допускает распечатку. Значит, действительно, машина рано или поздно должна распечатать выражение *X*.

Аналогично, если машина выдаст нам утверждение *PA–X*, тогда (поскольку утверждение *PA–X* должно быть истинным) она должна напечатать нам также и выражение *X–X*. Помимо этого, если машина напечатает утверждение *NP–X*, тогда она не сможет напечатать утверждение *P–X*, поскольку эти два высказывания не могут одновременно являться истинными: ведь первое из них утверждает, что машина не может напечатать выражение *X*, а второе — что машина может его напечатать.

Следующая задача высвечивает идею Гёделя так хорошо, что лучше трудно себе представить.

1. На редкость гёделева задача. Найдите истинное утверждение, которое машина не может напечатать!

2. Дважды гёделева головоломка. Все исходные условия остаются прежними — и, в частности, то, что машина абсолютно точна.

Пусть у нас имеются утверждение *X* и утверждение *Y;* одно из них является истинным, но не допускающим распечатки; однако, пользуясь лишь условиями, вытекающими из правил 1–4, мы не можем сказать, какое именно это утверждение, *X* или *Y*. Можете ли вы найти такие утверждения *X* и *Y*? (Подсказка: найти такие утверждения *X* и *Y*, чтобы утверждение *X* говорило нам о том, что *Y* допускает распечатку, а в утверждении *Y* говорилось бы о том, что *X* не допускает распечатки. Существуют два способа построения таких утверждений, причем оба они связаны с законами Фергюссона!)

3. Трижды гёделева проблема. Построить такие утверждения *X*, *Y* и

Z, чтобы *X* говорило о том, что *Y* допускает распечатку, *Y* говорило бы о том, что не допускает распечатки, а *Z* — о том, что *X* в свою очередь вновь допускает распечатку, и показать, что по крайней мере одно из этих утверждений (правда, нельзя сказать, какое именно) должно быть истинным, но не допускающим распечатки на машине.

Две машины, толкующие о себе, а также друг о друге

Добавим к четырем нашим символам еще один — символ R. Таким образом, теперь у нас пять символов: *P, R, N, A, –*. Пусть нам даны две машины, M_1 и M_2, каждая из которых может печатать различные выражения, составленные из этих пяти символов. При этом под символом *P* в данном случае мы будем подразумевать «допускающий распечатку первой машиной», а под символом *R* — «допускающий распечатку второй машиной». Таким образом, запись *P–X* означает, что выражение *X* допускает распечатку первой машиной, а запись *R–X* — что выражение *X* допускает распечатку второй машиной. Запись *PA–X* означает, что ассоциат выражения *X* допускает распечатку первой машиной, а запись *RA–X* показывает, что ассоциат выражения *X* допускает распечатку второй машиной. Наконец, «фразы» *NP–X, NR–X, NPA–X, NRA–X* говорят соответственно о следующем: выражение *X* не допускает распечатки первой машиной; выражение *X* не допускает распечатки второй машиной; выражение *X–X* не допускает распечатки первой машиной; выражение *X–X* не допускает распечатки второй машиной. Под утверждением мы будем теперь понимать любое выражение одного из следующих восьми типов: *P–X, R–X, NP–X, NR–X, PA–X, RA–X, NPA–X, NRA–X*. Кроме того, пусть нам известно, что первая машина печатает только истинные утверждения, а вторая — только ложные. Условимся называть некоторое утверждение доказуемым в том и только том случае, если оно допускает распечатку первой машиной, и ложным — в том и только том случае, если оно: может быть напечатано второй машиной. Таким образом, символ *P* означает «доказуемый» (от англ. provable), а символ *R* — «опровержимый» (от англ. refutable).

4. Найдите утверждение, которое было бы ложным, но неопровержимым.

5. Имеются такие два утверждения *X* и *Y*, что одно из них (правда, нам не известно, какое именно) должно быть либо истинным, но недоказуемым, либо ложным, но неопровержимым (мы не знаем, каким именно). Такие пары можно строить двумя способами, и соответственно я предлагаю вашему вниманию две задачи:

а. Найдите такие высказывания *X* и *Y*, чтобы *X* утверждало доказуемость *Y*, а *Y* утверждало опровержимость *X*. Далее, покажите, что одно из них (мы не можем сказать, какое именно) либо истинно, но недоказуемо, либо ложно, но неопровержимо.

б. Найдите такие высказывания *X* и *Y*, чтобы *X* утверждало недоказуемость *Y*, а *Y* утверждало неопровержимость *X*. Далее покажите, что одно из этих высказываний, *X* или *Y* (мы не можем сказать, какое именно), либо истинно, но недоказуемо, либо ложно, но неопровержимо.

6. А теперь рассмотрим задачу с четырьмя неизвестными! Пусть нам требуется найти такие высказывания *X*, *Y*, *Z* и *W*, чтобы *X* утверждало доказуемость *Y*, *Y* утверждало опровержимость *Z*, *Z* утверждало опровержимость *W*, а *W* утверждало бы неопровержимость *X*. Покажите, что одно из этих четырех высказываний должно быть либо истинным, но недоказуемым, либо ложным, но неопровержимым (хотя, какое из этих четырех будет именно таким высказыванием, сказать невозможно).

Машина Мак-Каллоха и теоремы Геделя

Возможно, читатель уже отметил определенное сходство приведенных выше задач с некоторыми свойствами первой машины Мак-Каллоха. В самом деле, работа этой машины оказывается связанной с теоремой Гёделя, и вот каким образом.

7. Пусть у нас имеется некоторая математическая система, приводящая к набору утверждений, одни из которых называются истинными, а другие — доказуемыми. Мы предполагаем также, что эта система правильная, то есть каждое доказуемое в ней утверждение является истинным. Далее, пусть каждому числу *N* ставится в соответствие некоторое утверждение, которое мы будем называть утверждением N. Предположим наконец, что наша система удовлетворяет следующим двум условиям.

Условие $\mathbf{Mc_1}$. Для любых чисел *X* и *Y*, если число *X* порождает число *Y* в первой машине Мак-Каллоха, утверждение $8X$ истинно тогда и только тогда, если утверждение Y доказуемо. (Напомним, что число $8X$ это не 8, умноженное на X, а цифра 8, за которой стоит число X.)

Условие Mc_2. Для любого числа X утверждение $9X$ истинно тогда и только тогда, если утверждение X не является истинным.

Найдите такое число N, при котором утверждение N истинно, но недоказуемо в данной системе.

8. Предположим, что в условии Mc_1 говорится не о «первой машине Мак-Каллоха», а о «третьей машине Мак-Каллоха». Попробуем теперь найти такое утверждение, которое было бы истинным, но недоказуемым.

9. Парадокс ли это? Вернемся вновь к задаче 1, однако внесем в нее некоторые изменения. Вместо символа P мы будем использовать символ B (в силу определенных психологических причин — каких именно, станет ясно из дальнейшего). Определение «утверждения» остается тем же, что и раньше, только на этот раз символ P везде заменяется на символ B. Таким образом, наши утверждения принимают теперь вид: $B–X$, $NB–X$, $BA–X$, $NBA–X$. Все утверждения, как и прежде, делятся на две группы — истинные и ложные, причем нам не известно, какие именно из утверждений истинны, а какие — ложны. Далее, вместо машины, печатающей различные утверждения, у нас теперь имеется ученый-логик, который верит одним утверждениям и не верит другим. Когда мы говорим, что наш логик не верит какому-то утверждению, мы вовсе не имеем в виду, что он обязательно сомневается в нем или отвергает его; просто неверно, что он верит в это утверждение. Другими словами, он либо считает его ложным, либо вообще не имеет о нем никакого мнения. Таким образом, символ B (от англ. believe — верить) означает «то, во что верит логик». Тогда для любого выражения X у нас есть четыре интерпретации выражений, содержащих X:

B_1: утверждение $B–X$ истинно тогда и только тогда когда логик верит в X;

B_2: утверждение $NB–X$ истинно тогда и только тогда когда логик не верит в X;

B_3: утверждение $BA–X$ истинно тогда и только тогда когда логик верит в $X–X$;

B_4: утверждение $BA–X$ истинно тогда и только тогда, когда логик не верит в $X–X$.

Предполагая, что наш логик точен, то есть что он не верит в ложные утверждения, мы можем, разумеется, найти некое утверждение, которое является истинным, но о котором логик не знает, что оно истинно. Таким утверждением будет высказывание *NBA–NBA* (которое говорит нам о том, что логик не верит в ассоциат выражения *NBA*, имеющий вид *NBA–NBA*).

А дальше начинается нечто интересное. Предположим, нам известно об этом ученом-логике следующее.

Обстоятельство 1. Наш ученый-логик знает логику не хуже нас с вами. Предположим, что он обладает абсолютными логическими способностями; это означает, что если ему заданы какие-нибудь логические посылки, то он может вывести из них все возможные суждения.

Обстоятельство 2. Логику известно, что выполняются условия B_1, B_2, B_3 и B_4.

Обстоятельство 3. Логик всегда точен, то есть он не верит в ложные утверждения.

Далее, раз логику известно, что имеют место условия B_1, B_2, B_3 и B_4, и он может рассуждать так же логично, как мы с вами, ничто не мешает ему провести те же рассуждения, которые провели мы, прежде чем доказали, что утверждение *NBA–NBA* должно быть истинным. Ясно, что, как только он это проделает, он сразу поверит в утверждение *NBA–NBA*. Но как только он в него поверит, это утверждение становится опровергнутым, ибо смысл данного утверждения как раз и заключается в том, что наш логик в него не верит, — тем самым в конце концов окажется, что наш логик неточен!

Итак, не приходим ли мы к некоему парадоксу, если принимаем обстоятельства 1, 2 и 3? Конечно, нет, никакого парадокса здесь нет. Просто в последнем абзаце моего рассуждения допущена намеренная неточность! Не могли бы вы ее обнаружить?

Решения

1. Для любого выражения *X* утверждение *NPA–X* означает, что ассоциат выражения *X* не допускает распечатки. В частности, утверждение *NPA–NPA* означает, что ассоциат выражения *NPA* не допускает распечатки. Но ассоциатом *NPA* является само утверждение *NPA–NPA*! Следовательно, высказывание *NPA–NPA* утверждает невозможность собственной распечатки; другими словами, это высказывание истинно в том и только том случае, если оно не допускает распечатки. Отсюда следует, что оно либо истинно, но не допускает распечатки, либо ложно, но распечатку допускает. Последний случай исключается, поскольку машина является точной. Следовательно, нам остается лишь первая возможность: данное утверждение истинно, но не может быть напечатано машиной.

2. Выберем в качестве *X* утверждение *P–NPA–P–NPA*, а в качестве Y — *NPA–P–NPA*. Утверждение *X* (которое имеет вид *P–Y*) говорит нам о том, что утверждение *Y* допускает распечатку. Смысл самого *Y* сводится к тому, что ассоциат утверждения *P–NPA* не допускает распечатки. Но ассоциатом утверждения *P–NPA* является *X*, значит, *Y* говорит нам о том, что *X* не допускает распечатки. (Между прочим, можно построить и другие *X* и *Y*, обладающие теми же свойствами: например, если взять в качестве *X* утверждение *PA–NP–PA*, а в качестве *Y* — утверждение *NP–PA–NP–PA*.)

Таким образом, у нас имеются два утверждения *X* и *Y*, причем *X* утверждает, что *Y* допускает распечатку, а *Y* утверждает, что *X* не допускает распечатки.

Предположим теперь, что *X* допускает распечатку. Тогда утверждение *X* окажется истинным, а это будет означать, что утверждение *Y* допускает распечатку. Но тогда *Y* окажется истинным, откуда будет следовать, что *X* распечатки не допускает. Тем самым мы приходим к противоречию, поскольку в данном случае *X* оказывается одновременно и допускающим, и не допускающим распечатку; следовательно, утверждение *X* не может быть напечатано. Далее, раз *X* не допускает распечатки, а *Y* как раз это и утверждает, то, стало быть, утверждение *Y* является истинным. Таким образом, мы имеем:

(1) *X* не допускает распечатки;

(2) *Y* истинно.

Наконец, утверждение *X* может быть либо истинным, либо ложным. Если *X* истинно, тогда, согласно (1), *X* истинно, но не допускает распечатки. Если же *X* ложно, тогда *Y* не допускает распечатки, поскольку само *X* говорит нам о том, что *Y* допускает распечатку. Значит, в данном случае *Y* истинно — согласно (2) — и не допускает распечатки. Итак, либо *X*, либо *Y* истинно и не допускает распечатки — однако определить, какое именно из этих двух выражений истинно и не допускает распечатки, оказывается невозможно.

Обсуждение. Описанная ситуация аналогична следующей ситуации, возникшей на острове рыцарей и плутов: пусть на острове имеются два обитателя *X* и *Y*, причем *X* утверждает, что *Y* — признанный рыцарь, а *Y* утверждает, что *X* — непризнанный рыцарь. Единственное заключение, которое мы можем сделать — это, что один из них является непризнанным рыцарем, но кто именно, сказать невозможно.

Подобная ситуация рассматривается в последней главе моей книги «Как же называется эта книга?» в разделе «Дважды гёделевы острова», к которому мы и отсылаем читателя.

3. Положим *Z* = *PA–P–NP–PA.*

Далее, положим *Y* = *NP–Z* (то есть *Y* = *NP–PA–P–NP–PA*).

Положим, наконец, *X* = *P–Y* (то есть *X* = *P–NP–PA–P–NP–PA*).

Из этих выражений сразу ясно: *X* утверждает, что *Y* допускает распечатку, а *Y* говорит нам о том, что *Z* не допускает распечатки. Что же касается *Z,* то оно утверждает, что допускает распечатку ассоциат утверждения *P–NP–PA;* но ассоциат *P–NP–PA* есть утверждение *P–NP–PA–P–NP–PA*, которое в свою очередь и есть *X*! Итак, *Z* утверждает, что *X* допускает распечатку.

Таким образом, *X* утверждает, что *Y* допускает распечатку, *Y* утверждает, что *Z* не допускает распечатки, а *Z* утверждает, что распечатку допускает *X*. Посмотрим теперь, что же из этого следует.

Предположим, что *Z* допускает распечатку. Тогда *Z* истинно, откуда следует, что *X* допускает распечатку, а значит, является истинным; это в свою очередь означает, что *Y* допускает распечатку и, следовательно, является истинным. Если же *Y* истинно, то, стало быть, *Z* не должно допускать распечатки. Таким образом, мы приходим к противоречию: если *Z* допускает распечатку, то оно ее не допускает. Значит, *Z* не допускает распечатки, и поэтому *Y* является истинным. Итак, нам известно, что:

(1) *Z* не допускает распечатки;

(2) *Y* истинно.

Далее, *X* может быть либо истинным, либо ложным. Предположим, что *X* истинно. Если *Z* ложно, то тогда *X* не допускает распечатки, а это означает, что *X* истинно, но не допускает распечатки. Если же *Z* истинно, то тогда, поскольку, согласно (1), оно не допускает распечатки, *Z* истинно, но не допускает распечатки. Итак, если *X* истинно, то либо *X*, либо *Z* истинно, но не допускает распечатки. Если же *X* ложно, тогда *Y* не допускает распечатки и, следовательно, *Y* истинно — согласно (2) — и не допускает распечатки.

Итак: если *X* истинно, то по крайней мере одно из двух утверждений *X* и *Z* является истинным, но не допускающим распечатки. Если же *X* ложно, то истинным, но не допускающим распечатки, оказывается утверждение *Y.*

4. Пусть *S* есть утверждение вида *RA–RA.* Оно говорит нам о том, что ассоциат выражения *RA* (а ассоциат *RA* есть само *S*!) является опровержимым; следовательно, *S* истинно в том и только том случае, когда *S* опровержимо. Поскольку *S* не может быть одновременно и истинным и опровержимым, значит оно ложно, но неопровержимо.

5. а) Выберем в качестве *X* утверждение *P–RA–P–RA*, а в качестве *Y* — утверждение *RA–P–RA*. Ясно, что *X* утверждает доказуемость *Y*, а *Y* утверждает опровержимость ассоциата выражения *P–RA* (ассоциат *P–RA* есть в данном случае просто само *X*). Итак, *X* утверждает, что *Y* доказуемо, а *Y* утверждает, что *X* опровержимо. (Другой вариант решения — принять за *X* утверждение *PA–R–PA*, а за *Y* — утверждение *R–PA–R–PA*.)

Далее, если *Y* доказуемо, то *Y* истинно, откуда следует, что *X* опровержимо и, следовательно, ложно, что в свою очередь означает, что *Y* недоказуемо. Таким образом, допущение о доказуемости *Y* приводит нас к противоречию; стало быть, оно неверно, и *Y* недоказуемо. Если же *Y* недоказуемо, то *X* ложно. Итак, мы имеем:

(1) *X* ложно;

(2) *Y* недоказуемо.

Теперь если *Y* истинно, то *Y* истинно и недоказуемо. Если же *Y* ложно, то *X* неопровержимо (поскольку *Y* утверждает опровержимость X), и поэтому в данном случае *X* ложно, но неопровержимо. Следовательно, либо *Y* истинно, но недоказуемо, либо *X* ложно, но неопровержимо.

б) Возьмем в качестве *X* утверждение *NP–NRA–NP–NRA*, а в качестве *Y* — утверждение *NRA–NP–NRA* (или же за *X* можно принять *NPA–NR–NPA*, а за *Y* — *NR–NPA–NR–NPA*). Тогда, как читатель может убедиться сам, *X* утверждает недоказуемость *Y*, а *Y* утверждает неопровержимость *X*. Если *X* опровержимо, то *X* ложно; тогда *Y* доказуемо и, значит, *Y* истинно, откуда следует, что *X* неопровержимо. Следовательно, *X* неопровержимо и, кроме того, *Y* истинно. Если же *X* ложно, то *X* ложно и неопровержимо. Если, наконец, *X* истинно, то *Y* недоказуемо; поэтому в данном случае *Y* будет истинным и недоказуемым.

Обсуждение. По аналогии предположим, что на нашем острове, где живут рыцари и плуты, имеются еще два обитателя *X* и *Y*, причем *X* заявляет, будто *Y* — признанный рыцарь, а *Y* утверждает, что *X* — отъявленный плут. Единственный вывод, который можно сделать, — это что один из них (мы не знаем, кто именно) должен оказаться либо непризнанным рыцарем, либо неотъявленным плутом. Точно такая же ситуация будет иметь место, если *X* станет утверждать, что *Y* непризнанный рыцарь, а *Y* заявит, что *X* — неотъявленный плут.

6. Положим

W = *NPA–P–R–R–NPA,*

Z = *R–W,* откуда *Z* = *R–NPA–P–R–R–NPA,*

Y = *R–Z,* откуда *Y* = *R–R–NPA–P–R–R–NPA,*

X = *P–Y,* откуда *X* = *P–R–R–NPA–P–R–R–NPA.*

Тогда *X* утверждает доказуемость *Y, Y* утверждает опровержимость *Z, Z* утверждает опровержимость *W,* а *W* утверждает недоказуемость *X* (действительно, *W* утверждает недоказуемость ассоциата выражения *P–R–R–NPA,* которым является само высказывание X).

Если *W* опровержимо, то *W* ложно; поэтому *X* доказуемо и, значит, истинно; следовательно, *Y* доказуемо, а значит, истинно; стало быть, *Z* опровержимо, а потому ложно. Отсюда сразу следует, что *W* неопровержимо. Итак, *W* не может быть опровержимым; значит, *W* является неопровержимым, и, следовательно, *Z* будет ложным.

Далее, если *W* ложно, то *W* ложно, но неопровержимо. Предположим, что *W* истинно; тогда *X* недоказуемо. Если *X* истинно, то *X* истинно и недоказуемо. Предположим теперь, что *X* ложно; тогда *Y* недоказуемо. Если *Y* истинно, то *Y* истинно, но недоказуемо. Предположим, наконец, что *Y* ложно; тогда *Z* неопровержимо. Итак, в данном случае *Z* ложно, но неопровержимо.

Приведенное рассуждение показывает, что либо *W* ложно и неопровержимо, либо *X* истинно и недоказуемо, либо *Y* истинно и недоказуемо, либо *Z* ложно и неопровержимо.

7. Эта задача фактически представляет собой просто записанный в других обозначениях вариант задачи 1 данной главы!

Мы знаем, что число 32983 в первой машине Мак-Каллоха порождает число 9832983. Следовательно, по условию Mc_1 утверждение 832983 истинно в том и только том случае, если утверждение 9832983 доказуемо. Кроме того, по условию Mc_2; утверждение 9832983 истинно в том и только том случае, если утверждение 832983 не является истинным. Итак, сопоставляя эти два факта, мы получаем, что утверждение 9832983 истинно в том и только том случае, если оно недоказуемо. Значит, решением является число 9832983.

Если мы сравним эту задачу с задачей 1, то увидим, что цифра 9 играет здесь роль *N*, цифра 8 соответствует символу *P*, цифра 3 соответствует *A,* а цифра 2 играет роль тире. В самом деле, если мы заменим символы *P*, *N*, *A*, — соответствующими цифрами 8, 9, 3, 2, то утверждение *NPA*–*NPA* (которое является решением задачи 1) трансформируется в число 9832983 (то есть в решение данной задачи!)

8. Прежде всего отметим, что третья машина Мак-Каллоха также подчиняется закону Мак-Каллоха, который гласит, что для любого числа *A* всегда найдется некое число *X*, которое порождает число *AX*. Доказывается это следующим образом. Из гл. 13 мы знаем, что существует число *H*, а имении число 5464, такое что для любого *X* число *H*2*H*2 порождает число *X*2*X*2. (Вспомним также, что число *H*2*H*2 в данной ситуации порождает само себя; впрочем, к нашей задаче это никакого отношения не имеет.) И теперь произвольное число *A* и положим *X* = *H*2*AH*2), Тогда число *X* порождает число *AH*2*AH*2, которое и есть *AX*. Таким образом, *X* порождает *AX*. Итак, для любого числа *A* число *X*, порождающее число *AX*, — это есть число 54642*A*54642.

Пусть нам требуется найти такое *X*, которое порождало бы 98*X*. Предположим, что это *X* действительно порождает число 98*X*. Тогда утверждение 8*X* истинно в том и только том случае, если утверждение 98*X* доказуемо (согласно условию Mc_1); поэтому утверждение 98*X* истинно в том и только том случае, если утверждение 98*X* недоказуемо (согласно условию Mc_2). Значит, утверждение 98*X* является истинным, но недоказуемым в данной системе (поскольку система правильна).

Теперь, если в качестве А мы возьмем число 98, то увидим, что числом *X*, порождающим 98*X*, является число 546429854642, Поэтому утверждение 98546429854642 истинно, но недоказуемо в данной системе.

9. Я сообщил вам, что наш логик точен, но я вовсе не говорил, будто он знает, что он точен! Если бы логик знал, что он точен, тогда данная ситуация действительно привела бы нас к противоречию. Поэтому правильный вывод из обстоятельств 1, 2 и 3 вовсе не содержит противоречия: просто-напросто хотя логик и точен, но он не может знать, что он точен.

Эта ситуация определенным образом связана с еще одной теоремой Гёделя, называемой обычно второй теоремой Гёделя о неполноте. Эта теорема (с некоторыми упрощениями) утверждает, что для систем с достаточно богатой структурой (а таковы системы, рассмотренные Гёделем в его пионерской работе), если такая система непротиворечива, то она не может доказать собственную непротиворечивость. Однако это очень глубокий вопрос, и я собираюсь рассмотреть его более подробно в своих последующих книгах.

17. Вечные отмирающие числа

Однажды вечером Крейг случайно повстречал Мак-Каллоха и Фергюссона. Они давно не виделись, все трое очень обрадовались встрече и решили вместе пойти куда-нибудь поужинать.

— А знаете, — сказал Мак-Каллох, когда ужин подходил к концу, — меня уже давно занимает одна интересная проблема.

— Это какая же? — поинтересовался Фергюссон.

— Дело вот в чем, — продолжал Мак-Каллох. — Когда я занимался изучением различных числовых машин, то столкнулся с тем, что практически в каждой машине одни числа оказываются для нее приемлемыми, а другие нет. Допустим, я ввожу в машину какое-то приемлемое число *X*. Тогда число *Y*, которое порождается этим *X*, вновь оказывается либо приемлемым, либо неприемлемым. Если *Y* неприемлемо, то на этом весь процесс заканчивается. Если же *Y* оказывается приемлемым числом, то я опять ввожу его в машину и смотрю, какое число *Z* выдаст мне машина на этот раз. Если теперь число *Z* оказывается неприемлемым, то на этом процесс останавливается; если же оно приемлемо, то я вновь ввожу это число в машину и процесс продолжается как минимум еще один цикл. Если я буду повторять такую процедуру снова и снова, то при этом возможны два варианта: либо я в конце концов получу неприемлемое число, либо описанный процесс будет длиться бесконечно. В первом случае я называю число *X* *отмирающим* относительно данной конкретной машины, во втором случае число *X* я называю *вечным*. Конечно, любое число может быть отмирающим для одной машины и вечным для другой.

— Давай возьмем твою первую машину, — предложил Крейг. — Я могу придумать кучу отмирающих чисел, а не можешь ли ты привести мне пример вечного числа?

— Ну хотя бы число 323, — ответил Мак-Каллох. — Ведь число 323 порождает самое себя и поэтому, сколько бы раз я не вводил его в машину, я всегда буду получать 323. Так что в данном случае процесс явно оказывается бесконечным.

— А ведь верно! — засмеялся Крейг. — Ну хорошо, а существуют ли другие вечные числа?

1. — Тогда, — продолжал Мак-Каллох, — что ты скажешь по поводу числа 3223? Отмирающее оно или вечное?

2. — А как насчет числа 32223? — спросил Фергюссон. — Оно для вашей первой машины — отмирающее или вечное?

Мак-Каллох на некоторое время задумался.

— Это не так трудно определить, — ответил он наконец — Однако я думаю, вам будет интересно разобраться в этом самому.

3. — Можете попробовать еще число 3232, — в свою очередь предложил Мак-Каллох, — попытайтесь определить — отмирающее оно или вечное.

4. — А если взять число 32323? — спросил Крейг. — Отомрет оно или нет?

5. — Все это очень интересно, — сказал Мак-Каллох, — но я еще не добрался до самого главного. А дело вот в чем: один мой приятель придумал весьма хитроумную числовую машину. Он утверждает, будто его машина может выполнять любые операции, на которые только способна числовая машина вообще. Мой друг назвал ее универсальной машиной. И вот оказывается, что есть несколько таких чисел, про которые ни я, ни он не можем сказать — отмирающие они или вечные. Поэтому мне хотелось бы разработать какой-нибудь чисто механический тест, чтобы определять, какие числа отмирающие, а какие — вечные. Правда, пока у меня ничего не выходит. Конкретнее, я пытаюсь найти такое число H, которое для любого приемлемого числа X давало бы вечное число HX, если X — отмирающее, и отмирающее число HX, если X — вечное. Если бы мне это удалось, то я сразу смог бы определить, отмирающее ли или вечное любое приемлемое число X.

— А как именно это определить с помощью числа H? — спросил Крейг.

— Если бы я нашел число H, — объяснил Мак-Каллох, — то сначала построил бы такую же машину, как у моего приятеля. Потом, взяв произвольное приемлемое число X, я ввел бы его в одну из машин; одновременно мой приятель ввел бы число HX в другую машину. Понятно, что описанный процесс может прекратиться только в одной из машин; если это произойдет в моей машине, я буду знать, что число X — отмирающее; если в машине моего приятеля, то я сразу пойму, что число X — вечное.

— Да ведь вам незачем строить вторую машину, — сказал Фергюссон. — Это можно сделать и на одной машине, просто переключая ее с одного процесса на другой.

— Верно, — согласился Мак-Каллох. — Но только все это пустые рассуждения, пока я не сумел найти число *H*. Вполне возможно, что моя машина просто не способна решить задачу о своей собственной «выживаемости», то есть, я хочу сказать, что, быть может, такого числа *H* вообще не существует. А может, это я не способен найти такое число. Вот эту то проблему, джентльмены, я и хотел бы обсудить вместе с вами.

— Ну что ж, — сказал Фергюссон, — прежде всего мы должны знать, по каким правилам работает данная машина.

— Всего в ней используется 25 правил, — начал было Мак-Каллох. — Первые два из них — те же самые, что и в моей первой машине.

— Минуточку, — прервал его Фергюссон. — Вы хотите сказать, что машина вашего приятеля подчиняется правилам 1 и 2?

— Вот именно, — ответил Мак-Каллох.

— Тогда мне все ясно, — заявил Фергюссон. — Ни одна машина, в которой действуют правила 1 и 2, не может решить задачу о своей собственной «выживаемости».

— Как же вы сумели так быстро об этом догадаться? — спросил Крейг.

— Я уже сталкивался с подобного рода вещами, — объяснил Фергюссон. — Не так давно в моей работе возникла аналогичная проблема.

И все же, как именно Фергюссон определил, что машина, подчиняющаяся правилам 1 и 2, не может решить задачу о своей собственной «выживаемости»?

Решения

1. Напомним, что число 3223 порождает число 23223, а число 23223 в свою очередь порождает число 3223. Значит, у нас есть два числа, 3223 и 23223, которые порождают друг друга. Отсюда следует, что оба они вечны: ведь если ввести в машину одно из них, то получится второе, а если ввести второе, то получится первое. Ясно, что такой процесс бесконечен.

2. Возьмем два любых числа *X* и Y. Мы будем говорить, что число *X* приводит к числу *Y*, если *X* порождает *Y*, или если *X* порождает какое-то число, которое порождает *Y*, или если *X* порождает какое-то число, которое порождает другое число, которое в свою очередь порождает *Y*, и т. д. Иначе говоря, если, введя в машину число *X*, мы на каком-то этапе нашего процесса получим число *Y*, то будем говорить, что число *X* приводит к числу *Y*. Так, например, число 22222278 приводит к числу 78 фактически на шестом этапе. В более общем виде: если число *T* представляет собой произвольную цепочку двоек, то для любого числа *X* число *TX* в конце концов приводит к *X*.

Далее, число 32223 не порождает самое себя, но приводит к самому себе, потому что оно порождает число 2232223, которое порождает затем число 232223, а это число в свою очередь вновь порождает 32223. Но раз число 32223 приводит к самому себе, то, стало быть, оно должно быть вечным.

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание на следующую закономерность: если число *T* состоит целиком из одних двоек, то число 3*T*3 должно приводить к самому себе и, следовательно, будет вечным.

3. Мне известен только один способ решения этой задачи: доказать в общем виде, что если число *T* состоит целиком из одних двоек, то число 3*T*32 вечно и, следовательно, частный его случай — число 3232 — тоже является вечным. Этот факт служит иллюстрацией некоторого еще более общего принципа, который используется нами в решении следующей задачи.

Предположим, что у нас имеется определенный класс чисел (неважно, конечный или бесконечный), причем такой, что каждое число из этого класса приводит к некоторому числу из этого же класса (либо к самому себе, либо к другому числу). Тогда все числа, входящие в этот класс, должны быть вечными.

Попробуем воспользоваться этим принципом применительно к нашей задаче. Рассмотрим класс чисел вида 3*T*32, где *T* — произвольная цепочка двоек. Покажем, что число 3*T*32 должно приводить к другому числу из этого же класса.

Возьмем сначала число 3232. Оно порождает число 32232, то есть элемент того же класса. Теперь, что нам дает число 32232? Оно порождает число 2322232, которое в свою очередь порождает число 322232, то есть элемент того же класса. А что получается с числом 322232? Оно порождает число 223222232, которое порождает число 23222232, а оно в свою очередь дает нам число 3222232, так что мы опять возвращаемся в указанный класс. В более общем виде: для любой цепочки двоек *T* число 32*T*32 порождает число *T*322*T*32, которое приводит к числу 322*T*32, опять представляющему собой элемент данного класса. Итак, все числа, входящие в указанный класс, являются вечными.

4. Число 32323 порождает число 3232323, которое порождает число 32323232323, а это последнее в свою очередь порождает число 3232323232323232323. Дальнейшая схема представляется очевидной: любое число, состоящее из повторенного несколько раз числа 32 с тройкой на конце, порождает другое число того же вида (только более длинное), причем все эти числа будут вечными.

5. Прежде всего обратим внимание на следующее обстоятельство: пусть у нас имеются два числа *X* и *Y*, такие, что число *X* порождает число *Y*. Тогда если *Y* — отмирающее число, то *X* тоже должно быть отмирающим, поскольку если *Y* через какие-то *n* этапов приводит к неприемлемому числу *Z*, то *X* приводит к тому же самому числу *Z* через $n + 1$ этапов. Кроме того, если *Y* вечно, то оно никогда не приведет к неприемлемому числу; стало быть, и число *X* не может привести к неприемлемому числу, поскольку *X* вообще может приводить к любому числу только через *Y*. Таким образом, если число *X* порождает число *Y*, то «выживаемость» числа *X* (то есть вечное оно или отмирающее) будет такой же, как и «выживаемость» числа *Y*, то есть либо оба они оказываются вечными, либо отмирающими.

Рассмотрим теперь произвольную машину, которая подчиняется правилам 1 и 2 (и, возможно, еще каким-то правилам). Возьмем некоторое число *H*. Мы знаем, что, согласно правилам 1 и 2, должно существовать такое число *X*, которое порождает число *HX* (напомним, кстати, что одним из таких чисел является число *H*32*H*3). Поскольку число *X* порождает число *HX*, то оба они должны быть либо отмирающими, либо вечными (ведь, как мы только что убедились, их «выживаемость» одинакова). Значит, не может существовать такого числа *H*, для которого в случае произвольного *X* одно из пары чисел *H* и *HX* было бы отмирающим, а другое — вечным, поскольку для конкретного числа вида *X* = *H*32*H*3 это оказывается совсем не так. Следовательно, ни одна машина, подчиняющаяся правилам 1 и 2, не может решить задачу о своей собственной «выживаемости».

Отметим по ходу дела, что полученный результат оказывается справедливым также для любой машины, которая подчиняется правилам 1 и 4, а в сущности, и для любой машины, которая подчиняется закону Мак-Каллоха. (Кстати говоря, вся эта проблема тесно связана с известной «проблемой останова» для машин Тьюринга, решение которой, как известно, тоже отрицательно.)

18. Машина, которая так и не была создана

Как-то днем, вскоре после описанных событий, Крейг спокойно сидел дома, в своем кабинете. В дверь робко постучали — это оказалась его квартирная хозяйка.

— Входите, пожалуйста, миссис Хоффман, — пригласил Крейг.

— Простите, мистер Крейг, там вас спрашивает какой-то джентльмен. Только больно уж чудаковато он выглядит, — сказала миссис Хоффман. — Говорит, будто он на пороге величайшего открытия в математике! И еще утверждает, что вас это необычайно заинтересует, и потому он хочет видеть вас немедленно. Что ему сказать?

— Ну что ж, — несколько помедлив, ответил Крейг. — Проведите его ко мне. У меня как раз найдется полчасика.

Через несколько секунд дверь кабинета распахнулась и в комнату влетел безумного вида человек, смахивавший на изобретателя (это и был изобретатель). Он швырнул свой портфель на диван и, вскинув руки кверху, начал приплясывать, как сумасшедший, приговаривая:

— Нашел! Нашел! Еще чуть-чуть и я стану самым великим математиком на свете! Евклид, Архимед, Гаусс — все канут в Лету! А Ньютон, Лобачевский, Бойаи, Риман — разве…

— Спокойно, спокойно, — не повышая голоса, но достаточно твердо прервал его Крейг. — Что же именно вы нашли?

— Еще не совсем нашел, — отвечал незнакомец уже не так возбужденно. — Но вот-вот найду и, когда найду, стану самым великим математиком всех времен и народов! Имена Галуа, Коши, Дирихле, Кантора…

— Ну хватит! — решительно сказал Крейг. — Может быть, вы все же расскажете мне, что именно вы хотите найти?

— Хочу найти? — воскликнул незнакомец с обидой. — Говорю вам, я почти нашел! Я почти придумал универсальную машину, которая сможет решать любые математические задачи! Имея такую машину, я буду знать все! Я смогу…

— А, мечта Лейбница! — сказал Крейг. — Лейбниц ведь тоже мечтал о такой машине. Боюсь только, что мечта эта неосуществима.

— Лейбниц! — презрительно усмехнулся незнакомец. — Лейбниц! Да он просто не знал, с чего начать! А у меня практически уже есть такая машина! Не хватает только нескольких мелочей… Но давайте я вам лучше поподробней расскажу о своих идеях.

— Я хочу построить некую машину *M*, — начал объяснения незнакомец (как выяснилось, звали его Уолтон), — с вполне определенными свойствами: сначала вы вводите в машину натуральное число *x*, потом натуральное число *y* — и тут машина начинает работать и выдает некоторое новое число, которое мы будем обозначать как *M(x, y)*. Итак, *M(x, y)* — это результат, который мы имеем на выходе машины *M* в том случае, если на ее входе в качестве первого числа задать число *x*, а в качестве второго — число *y*.

— Пока все ясно, — сказал Крейг.

— Кроме того, — продолжал Уолтон, — под словом «число» я понимаю произвольное положительное целое число, поскольку только эти числа я и буду рассматривать в дальнейшем. Как вам, должно быть, известно, обычно говорят, что два натуральных числа имеют одинаковую четность, если они одновременно либо оба четны, либо оба нечетны; если же одно из них четно, а другое нечетно, то их называют числами с различной четностью.

Теперь для любого числа *x* мы будем обозначать через *x** число вида *M(x, x)*. Так вот, я хочу, чтобы моя машина обладала следующими тремя свойствами.

Свойство 1. Для любого числа а должно существовать некоторое число *b*, такое, что при любом *x* число *M(x, b)* будет иметь ту же самую четность, что и число *M(x*,a)*.

Свойство 2. Для любого числа b должно существовать некоторое число *a*, такое, что при любом *x* число *M(x, a)* будет иметь другую четность по сравнению с числом *M(x, b)*.

Свойство 3. Должно существовать число *h*, такое, что при любом *x* число *M(x, h)* будет иметь ту же самую четность, что и само *x*.

— Вот такими свойствами должна обладать моя машина, — заключил Уолтон.

Инспектор Крейг некоторое время молчал, размышляя.

— Ну и в чем же дело? — спросил он наконец.

— Увы! — отвечал Уолтон. — Сначала я построил машину со свойствами 1 и 2, потом — машину со свойствами 1 и 3, наконец, я сконструировал машину со свойствами 2 и 3. Все три машины прекрасно работают — вон там, в портфеле, у меня подробные схемы… Но когда я пытаюсь объединить все три свойства в одной машине, у меня ничего не получается.

— Что же именно у вас не получается? — поинтересовался Крейг.

— Да она вообще не работает! — воскликнул Уолтон с отчаянием. — Когда я ввожу в нее пару чисел (x, y), то вместо того, чтобы выдать мне результат, машина вдруг начинает странно гудеть, как будто в ней происходит нечто вроде короткого замыкания. Как вы думаете, отчего это может быть?

— Да-а, — покачал головой Крейг. — Здесь есть над чем подумать. Правда, сейчас мне надо уйти, меня ждут, но если вы оставите мне свою визитную карточку или просто фамилию и адрес, то я немедленно дам знать, как только во всем этом разберусь.

Через несколько дней инспектор Крейг написал Уолтону письмо. Начиналось оно так:

> Дорогой мистер Уолтон!
>
> Благодарю Вас за то, что вы посетили меня и рассказали о машине, которую пытались построить. Честно говоря, я не совсем понимаю, каким образом ваша машина, даже если бы вам действительно удалось ее создать, могла бы решать любые математические задачи, — хотя вы, несомненно, разбираетесь в этом лучше меня. Однако должен вам сказать, что ваш замысел напоминает мне попытку создания вечного двигателя — он также неосуществим! Фактически же дело обстоит гораздо хуже, чем с вечным двигателем. Ведь последний, несмотря на то что он невозможен в нашем физическом мире, все же не является логически невозможным. Машина же, которую хотите создать вы, невозможна не только физически, но и логически, поскольку те три свойства, о которых вы упоминали, содержат в себе определенное логическое противоречие.

Дальше Крейг объяснял, почему существование подобной машины логически невозможно. Можете ли вы сообразить, почему?

Полезно разбить решение этой задачи на три этапа:

1) показать, что для любой машины, обладающей свойством 1, при любом числе a должно существовать по крайней мере одно число x, такое, что число $M(x, a)$ будет иметь ту же самую четность, что и само x;

2) показать, что для любой машины, обладающей свойствами 1 и 2, при любом числе b найдется некоторое число x, такое, что число $M(x, b)$ будет иметь иную четность по сравнению с этим x;

3) ни одна машина не может объединить в себе свойства 1, 2 и 3.

Решение

а) Рассмотрим машину, обладающую свойством 1. Возьмем произвольное число *a;* тогда, согласно свойству 1, найдется число *b,* такое, что при любом *x* число *M(x, b)* будет иметь ту же самую четность, что и число $M(x^{\#}, a)$. В частности, если положить *x* равным *b,* то число *M(b, b)* будет обладать той же самой четностью, что и число $M(b^{\#}, a)$. Однако число *M(b, b)* — это просто $b^{\#}$, и, значит, число $b^{\#}$ должно иметь ту же самую четность, что и число $M(b^{\#}, a)$. Таким образом, положив *x* равным числу $b^{\#}$, мы видим, что число *M(x, a)* имеет ту же самую четность, что и само число *x.*

б) Рассмотрим теперь некоторую машину, обладающую свойствами 1 и 2. Возьмем произвольное число *b;* тогда, согласно свойству 2, обязательно найдется число *a*, такое, что при любом *x* число *M(x, a)* будет иметь другую четность по сравнению с числом *M(x, b).* Но, согласно свойству 1, существует по крайней мере одно *x,* при котором число *M(x, a)* имеет ту же самую четность, что и само *x,* — мы только что доказали это в пункте *a.* Такое число *x* должно иметь другую четность по сравнению с числом *M(x, a)*, поскольку оно одинаково по четности с числом *M(x, a),* а *M(x, a)* в свою очередь имеет иную четность по сравнению с числом *M(x, b).*

в) Рассмотрим вновь машину со свойствами 1 и 2. Возьмем произвольное число *h;* тогда, согласно пункту «б» нашего решения (если положить *b* равным *h*), существует по крайней мере одно число *x,* такое, что число *M(x, h)* будет отличаться по четности от числа *x.* Значит, число *M(x, h)* не может иметь ту же самую четность, что и число *x* для всех *x;* другими словами, свойство 3 оказывается невыполнимым. Таким образом, свойства 1, 2 и 3, если воспользоваться словцом Амброза Бирса,[11] «несосуществимы».

Примечание. Невозможность построения машины Уолтона тесно связана с теоремой Тарского (гл. 15). Поэтому для доказательства этой теоремы и для доказательства невозможности существования подобной машины можно использовать одни и те же рассуждения.

19. Мечта Лейбница

Фергюссон (да, по-своему, как и чудаковатый Уолтон) пытался создать нечто такое, что в случае успеха можно было бы считать осуществлением самой страстной мечты Лейбница; ведь Лейбниц серьезно размышлял о возможности создания счетной машины, которая могла бы решить все математические проблемы, а заодно и философские! Однако мечта Лейбница о машине, решающей любые математические задачи (а философские проблемы тем более), оказалась недостижимой. Этот вывод следует из результатов. полученных Гёделем, Россером, Черчем, Клини, Тьюрингом, Постом. К их работам мы сейчас и обратимся.

Существует определенный класс счетных машин. назначение которых состоит в том, чтобы производить, те или иные математические операции над положительными целыми числами. Мы подаем на вход такой машины некое число x и получаем на выходе новое число y. Например, можно легко представить себе машину (не очень, понятно, интересную), которая при подаче на ее вход числа x дает нам на выходе число $x + 1$. Обычно говорят, что такая машина выполняет операцию прибавления единицы. Можно сделать машину, которая выполняет, скажем, операцию сложения двух чисел. В такой машине мы сначала подаем на вход число x, потом число y, затем нажимаем кнопку и через какое-то время получаем на выходе число $x + y$. (Для таких машин имеется свое техническое название — их, по-моему, называют суммирующими машинами!)

Существует и другой тип машин, которые можно назвать *генерирующими*, или *перечисляющими*, машинами Такие машины будут играть более важную роль в наших последующих рассуждениях (где мы следуем теориям Поста). Эти машины не имеют входов; они запрограммированы на генерирование множества положительных целых чисел. Например, одна машина может генерировать у нас множество четных чисел, другая — генерировать множество нечетных чисел, третья — множество простых чисел, и т. д. При этом типичная машинная программа для генерирования четных чисел может выглядеть так.

Мы задаем машине две команды (1) напечатать число 2; (2) если напечатано число n, то напечатать число $n + 2$. (Разрешается задавать вспомогательные правила, которые определяют порядок выполнения команд таким способом, чтобы машина в конечном счете выполнила все, что она может выполнить.) Такая машина, подчиняясь команде (1), рано или поздно напечатает число 2, а напечатав 2 она в конце концов, подчиняясь команде (2), напечатает число 4, затем, напечатав 4, она, опять же руководствуясь командой (2), напечатает число 6, потом числа 8, 10 и т. д. Тем самым наша машина будет генерировать множество четных чисел. (Отметим, что без введения дополнительных команд она никогда не сможет произвести нам числа 1, 3, 5 или любое другое нечетное число.) Чтобы запрограммировать машину на генерирование нечетных чисел, нам следует просто заменить первую команду на команду «напечатать число 1». Иногда объединяют вместе две или несколько машин, с тем чтобы информация на выходе одной машины могла быть использована в другой. Пусть, например, у нас имеются две машины, А и В, программу для которых мы составим следующим образом. Машине А мы зададим две команды: (1) напечатать число 1; (2) если машина В напечатала число n, то напечатать число $n + 1$. Машине В мы задаем только одну команду: (1) если машина А напечатала число n, то напечатать число $n + 1$. Какие числа будет генерировать машина А, а какие — машина В? Ответ: машина А будет генерировать множество нечетных чисел, а машина В — множество четных чисел.

Теперь представим себе, что программа для генерирующей машины записывается не на естественном языке, а кодируется в виде некоторого целого числа (представляющего собой цепочку цифр); кодирование можно осуществить так, чтобы каждое положительное целое число представляло собой номер определенной программы. Пусть M_n — это машина, программа которой имеет кодовый номер n. Расположим теперь все генерирующие машины в виде бесконечной последовательности M_1, M_2…, M_n… (M_1 — это машина с номером программы 1, M_2 — машина с номером программы 2 и т. д.)

Для любого множества чисел А (естественно, имеется в виду множество положительных целых чисел) и для любой машины M мы будем говорить, что машина *М генерирует* множество A, или, иначе, машина M *перечисляет* множество A, если каждое число, входящее в множество A, в конце концов будет напечатано машиной M, и в то же время ни одно число, не входящее в A, этой машиной напечатано не будет. Множество A мы будем называть *эффективно перечислимым* (иногда говорят — *рекурсивно перечислимым*), если существует хотя бы одна машина M_i которая перечисляет множество A. Кроме того, мы будем говорить, что множество A *разрешимо* (или *рекурсивно*), если существуют одна машина M_i, которая перечисляет само множество А, и другая машина M_j которая перечисляет множество всех чисел, не входящих в A. Таким образом, множество A

является разрешимым том и только том случае, если и A, и его дополнение $\bar{A}$ являются эффективно перечислимыми.

Предположим, что множество A — разрешимо и у нас имеются машина M_i, которая генерирует A, и машина M_j которая генерирует дополнение $\bar{A}$. Тогда оказывается, что существует эффективный способ, позволяющий определять, входит ли некоторое число n в множество A или нет. Допустим, к примеру, нас интересует, входит ли в множество A число 10. Мы приводим в действие обе машины одновременно и ждем. Если число 10 принадлежит множеству A, то рано или поздно это число будет напечатано машиной M_i, так что мы сразу узнаем, что число 10 входит в A. Если же число 10 не принадлежит множеству A, то в конце концов это число напечатает машина M_j — тем самым мы сразу узнаем, что число 10 не входит в A. Таким образом, в конечном итоге мы обязательно выясним, принадлежит ли число 10 множеству A или нет. (Понятно, что сказать заранее, сколько нам придется ждать, невозможно; нам известно лишь, что через какой-то конечный промежуток времени мы непременно узнаем ответ.)

Предположим теперь, что множество A эффективно перечислимо, но неразрешимо. В таком случае у нас имеется машина M_i, которая генерирует множество A, но не окажется машины, которая генерировала бы дополнение A. Допустим, что мы опять хотим узнать, входит ли в A некоторое заданное число — скажем, число 10. Лучшее, что мы можем сделать в таком случае — запустить машину M_i и надеяться на удачу! Теперь наши шансы узнать ответ составляют лишь 50 %. Если число 10 действительно входит в множество A, то в конце концов мы обязательно это узнаем, поскольку рано или поздно машина M_i напечатает это число. Если же число 10 в A не входит, то машина M_i никогда этого числа не напечатает, однако сколько бы мы ни ждали, у нас никогда не будет уверенности, что через какое-то время машина все-таки не напечатает число 10. Итак, если число 10 принадлежит множеству A, то рано или поздно мы узнаем об этом; если же число 10 не принадлежит А, то мы никогда не будем знать об этом наверняка (во всяком случае, если ограничимся наблюдением за машиной M_i). Такое множество A можно с основанием называть *полуразрешимым*.

Первое важное свойство генерирующих машин заключается в том, что можно сконструировать так называемую универсальную машину U, назначение к торой — систематически наблюдать за поведением во машин

M_1, M_2, M_3…, M_n… и, как только машина M_x напечатает число y, сразу же сообщить нам об этом. Но каким образом это сделать? Очень просто — напечатать некоторое число, скажем для данных x и y напечатать $x*y$, то есть число, как и ранее, состоящее из цепочки единиц длиной x, за которой следует цепочка нулей длиной y. Итак, основная команда для машины U такова: когда машина M_x напечатает число y, то напечатать число $x*y$.

Допустим, например, что машина M_a запрограммирована на генерирование множества нечетных чисел, а машина M_b — на генерирование множества четных чисел. Тогда машина U будет печатать числа $a*1$, $a*3$, $a*5$ и т. д., а также числа $b*2$, $b*4$, $b*8$ и т. д., однако она никогда не напечатает число $a*4$ (поскольку машина M_a никогда не напечатает число 4) или число b*3 (поскольку машина M_b никогда не напечатаем число 3).

Далее, поскольку машина U имеет свою собственную программу, то, следовательно, она входит в семейство программируемых машин M_1, M_2…, M_n… Это значит, что существует некоторая машина M_k, номер программы которой k совпадает с номером программы машины U, причем машина M_k и есть сама машина *U!* (В строгой научной статье я указал бы, что это за число k.)

Можно заметить, что наша универсальная машина M_k наблюдает в числе прочих и за своим собственным поведением. Поэтому, как только машина M_k напечатает число n, она должна напечатать число $k*n$, а значит, и число $k*(k*n)$, а также и число $k*[k*(k* n)]$ и т. д.

Другой важной особенностью этих машин является то, что, имея произвольную машину M_a, мы всегда можем запрограммировать другую машину M_b таким образом, чтобы она печатала в точности такие числа x, при которых машина M_a печатает числа $x*x$. (Машина M_b, так сказать, «следит» за машиной M_a и действует но такой команде: напечатать число x после того, как машина M_a напечатает число $x*x$.) Можно, наконец, закодировать программы так, что для каждого а таким числом b окажется число $2a$; тогда для каждого а машина M_{2a} будет печатать в точности такие числа x, при которых машина M_a печатает числа $x*x$. Представим себе, что мы так и устроили, и запишем два основных утверждения, на которые будем опираться в дальнейшем.

Утверждение 1. Универсальная машина U печатает число $x*y$, если и только если машина M_x печатает число y.

Утверждение 2. Для каждого числа a машина M_{2a} печатает число x, если и только если машина M_a печатает число $x*x$.

Вот теперь мы подходим к самому главному. Оказывается, что любую формальную математическую задачу можно сформулировать в виде вопроса: напечатает машина M_a число b или не напечатает? Иначе говоря, для любой данной формальной системы аксиом можно всем утверждениям системы приписать определенные гёделевы номера, после чего найти такое число a, при котором машина M_a будет печатать гёделевы номера всех доказуемых утверждений данной системы и никаких других номеров печатать не будет. Поэтому, для того чтобы узнать, доказуемо или недоказуемо данное утверждение в исходной системе аксиом, мы берем его гёделев номер b и задаемся вопросом: напечатает ли машина M_a число b или не напечатает? Значит, если бы у нас существовал какой-то эффективный алгоритм, позволяющий определять, какие машины печатают те или иные числа, то мы вполне могли бы решить, какие утверждения доказуемы в той или иной системе аксиом. В этом, собственно, и заключалось бы осуществление мечты Лейбница. Более того, вопрос — какие машины печатают те или иные числа, может быть сведен к вопросу — какие числа печатает универсальная машина U, потому что вопрос, напечатает ли машина M_a число b, равносилен вопросу, напечатает ли машина U число $a*b$. Поэтому полное познание машины U означает полное познание всех машин, а следовательно, и всея математических систем. И наоборот, любой вопрос том, напечатает ли некая машина заданное число; может быть сведен к вопросу о том, доказуемо ли то или иное утверждение в определенной математической системе. Таким образом, полное познание всех формальных математических систем означает полное познание нашей универсальной машины.

Итак, главный вопрос, стоящий перед нами, можно сформулировать следующим образом. Пусть V — множество чисел, которые может напечатать универсальная машина U (это множество иногда называют *универсальным множеством*). Разрешимо множество V или нет? Если оно разрешимо, то мечта Лейбница осуществима; если же нет, то его стремления никогда не смогут быть реализованы. Поскольку V эффективно перечислимо (ведь оно генерируется машиной U), то вопрос сводится к тому, существует ли некая машина M_a, которая сможет напечатать дополнение V, а именно множество $\bar{V}$. Иначе говоря, существует ли такая машина M_a, которая печатает те и только те числа, которые машина U не печатает? На этот вопрос можно дать исчерпывающий ответ лишь на основании утверждений 1 и 2, о которых мы упоминали выше.

Теорема L. Множество $\bar{V}$ не является эффективно перечислимым: для любой заданной машины M_a либо существует какое-то число, принадлежащее множеству $\bar{V}$, которое машина M_a не может напечатать, либо машина M_a напечатает по крайней мере одно число, которое принадлежит не множеству $\bar{V}$, а множеству V.

Сумеет ли читатель доказать теорему L?

Рассмотрим также следующий частный случай. Пусть у нас имеется утверждение о том, что машина M_5 перечислила множество $\bar{V}$. Чтобы опровергнуть это утверждение, достаточно отыскать некоторое число n, показав при этом, что либо оно принадлежит множеству $\bar{V}$, но не может быть напечатано машиной M_5, либо оно не принадлежит множеству V, но машина M_5 может его напечатать. Сумеете ли вы найти такое число n?

Я приведу решение этой задачи сразу, а не в конце главы, — по существу, это решение просто повторяет доказательство Гёделя.

Итак, возьмем произвольное число a. Согласно утверждению 2, машина M_a напечатает число $x*x$, если и только если машина M_{2a} напечатает число x. Но, согласно утверждению 1, машина M_{2a} напечатает число x, если и только если универсальная машина U напечатает число $2a*x$, или, что то же самое, если число $2a*x$ принадлежит множеству V. Следовательно, машина M_a напечатает число $x*x$, если и только если число $2a*$x входит в V. В частности (положив x равным $2a$), машина M_a напечатает число $2a*2a$, если и только если число $2a*2a$ принадлежит множеству V. Итак, либо (1): машина M_a напечатает число $2a*2a$, и число $2a*2a$ принадлежит множеству V; либо (2): машина M_a не напечатает число $2a*2a$, и число $2a*2a$ принадлежит множеству V.

Если выполнено условие (1), то машина Ма напечатает число $2a*2a$, которое входит не в $\bar{V}$, а в V; это означает, что машина M_a не генерирует множество $\bar{V}$, потому что она может напечатать по крайней мере одно число $2a*2a$, которое не входит в множество $\bar{V}$. Если же выполняется (2), то мы опять получаем, что машина M_a не генерирует множество $\bar{V}$ поскольку число $2a*2a$ принадлежит множеству $\bar{V}$, а машина M_a это число напечатать не может. Итак, в обоих случаях машина M_a не генерирует множество $\bar{V}$. В силу произвольности выбора а это означает, что никакая машина не может перечислить множество V, и, следовательно, это множество не является эффективно перечислимым.

Конечно, в частном случае *a* = 5 число *n* окажется равным 10*10.

Но все же какое это имеет отношение к мечтам Лейбница? Строго говоря, мы не можем ни доказать, ни опровергнуть возможность осуществления лейбницевых надежд, поскольку они никогда точно не формулировались. Ведь во времена Лейбница не существовало строгого определения понятий «вычислительная машина» или «генерирующая машина»; соответствующие точные определения были получены лишь в нашем веке. Подобных определений имеется много (их вводили Гёдель, Эрбран, Клини, Черч, Тьюринг, Пост, Смаллиан, Марков и многие другие), однако было проверено, что все они эквивалентны между собой. И если под словом «разрешимо» понимать разрешимость в соответствии с любым из этих эквивалентных определений, то мечта Лейбница оказывается неосуществимой по той простой причине, что сами машины можно перенумеровать таким образом, что утверждения 1 и 2 обязательно будут выполняться. Тогда по теореме L множество V, генерируемое универсальной машиной, оказывается неразрешимым — оно будет лишь полу разрешимо. Следовательно, не существует никакой «чисто механической» процедуры, с помощью которой можно было бы узнать, какие утверждения доказуемы в той или иной системе аксиом, а какие нет. Таким образом, любая попытка изобрести некий хитроумный «механизм» для решения всех математических задач обречена на провал.

Это означает, что, выражаясь пророческими словами известного логика Эмиля Поста (1944), математическое мышление является и всегда будет оставаться по сути своей сугубо творческим процессом. Или, как остроумно заметил математик Пол Розенблум, — человеку никогда не избавиться от необходимости пользоваться своим умом, сколько бы ума он не приложил к этому.

---

notes

Примечания

1

Принцип работы *(лат.)*.

2

Инспектор Крейг — герой моей предыдущей книги логических головоломок «Как же называется эта книга?» (М.: Мир, 1981).

3

Многие задачи этого типа представлены в моей книге «The Chess Mysteries of Sherlock Holmes» («Шахматные тайны Шерлока Холмса»).

4

От лат. *verbalis* — словесный. — *Прим. ред.*

5

Что соответствует случаю, когда одно или два числа из тройки A, B, C мы полагаем равными единице.

6

То есть построение куба с объемом, вдвое большим, чем объем данного куба. — *Прим. перев.*

7

Некоторые из них оказались весьма интересными, и о них я надеюсь рассказать в своей следующей книге.

8

«Uber formal unentscheidbare Satze der „Principia Mathematica“ und verwandter Systeme'I» («О формально неразрешимых предложениях „Принципов математики“ и других родственных систем»), Monatshefte fur Mathematik und Physik, 38, 173–198.

9

Выборочный перевод автора.

10

Смальян Р. Теория формальных систем. Пер. с англ. — М.: Наука, 1981.

11

Амброз Бирс (1842–1914) — американский писатель. На русский язык неоднократно переводились его рассказы. — *Прим. перев.*