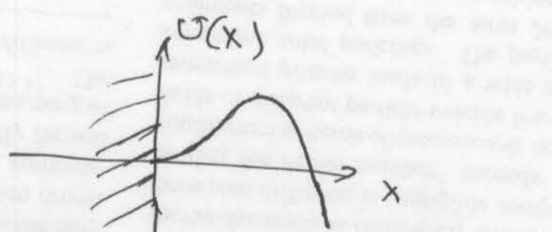
מבחן תשע"ד מכניקה - מועד ב'

פתרונות.

1. א)

$$U(x)=-\int_0^x F(x)dx=\int_0^x (kx-\beta x^3)dx=$$
$$=\frac{kx^2}{2}-\frac{\beta}{4}x^4$$

ב)



ג) נמצא את המקסימום של $U(x)$:

$$\frac{dU}{dx}=kx-\beta x^3=0$$

$$k=\beta x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{k}{\beta}}$$

(רק הסימן החיובי חשוב מבחינתנו, כי משמאל לראשית יש קיר).

$$U\left(\sqrt{\frac{k}{\beta}}\right)=\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{\beta}-\frac{\beta}{4}\frac{k^2}{\beta^2}=\frac{k^2}{2\beta}-\frac{k^2}{4\beta}=\frac{k^2}{4\beta}$$

עבור $E>\frac{k^2}{4\beta}$ יש רק מצבים בלתי קשורים.

עבור $E<\frac{k^2}{4\beta}$ יש מצבים קשורים ומצבים בלתי קשורים, תלוי איפה החלקיק נמצא:

עבור אנרגיה נתונה $E_0<\frac{k^2}{4\beta}$, גבול המצב הקשור יהיה:

$$E_0=\frac{kx^2}{2}-\frac{\beta}{4}x^4$$

$$\alpha=x^2$$

$$E_0=\frac{k}{2}\alpha-\frac{\beta}{4}\alpha^2$$

$$\frac{\beta}{4}\alpha^2 - \frac{k}{2}\alpha + E_0 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{k^2}{4} - E_0\beta} + k/2}{\beta/2}$$

$$X = \left[\frac{\pm\sqrt{\frac{k^2}{4} - E_0\beta} + k/2}{\beta/2}\right]^{1/2}$$

הסימן השלילי יתן את ה-X המכסימלי

עבור מצבים קשורים. הסימן השלילי נותן את

ה-X המינימלי עבור מצבים בלתי קשורים.

$$E_T = \frac{kX_0^2}{2} - \frac{\beta}{4}X_0^4 \qquad 3$$

בראשים הבזוים — כל האנרגיה הופכת

לקינטית!

$$E_k = \frac{kX_0^2}{2} - \frac{\beta}{4}X_0^4$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{kX_0^2}{2} - \frac{\beta}{4}X_0^4$$

$$v^2 = \frac{kX_0^2}{m} - \frac{\beta X_0^4}{2m}$$

$$v = \sqrt{\frac{kX_0^2}{m} - \frac{\beta X_0^4}{2m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 36}{2} - \frac{0.01\cdot 1296}{2\cdot 2}} \approx 5.7\ m/s \qquad 2$$

2. א.

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2E_i}{m_1}}$$

מהירות מרכז המסה - קבועה:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1 V}{m_1 + m_2}\hat{x} \xRightarrow{m_1=m_2} \vec{V}_{cm} = \frac{V}{2}\hat{x} = \sqrt{\frac{E_i}{2m}}\hat{x}$$

ב. במערכת מרכז המסה, מהירות החלקיק לפני ההתנגשות היא:

$$\vec{V}_1^{cm} = \vec{V}_1 - \vec{V}_{cm} = V\hat{x} - \sqrt{\frac{E_i}{2m}}\hat{x} =$$

$$= \sqrt{\frac{2E_i}{m}}\hat{x} - \sqrt{\frac{E_i}{2m}}\hat{x} = \sqrt{\frac{E_i}{m}}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{E_i}{2m}}$$

במערכת מרכז המסה $\vec{p}_1^{cm} = -\vec{p}_2^{cm}$

באופן דומה, לאחר ההתנגשות $\vec{p}_1^{cm'} = -\vec{p}_2^{cm'}$

שני המסות - זהות, לכן (במערכת מרכז המסה), האנרגיות של שני החלקיקים - זהות.

$$E^{cm} = E_1^{cm} + E_2^{cm} = \frac{(p_1^{cm})^2}{2m}\cdot 2 = \frac{(p_1^{cm})^2}{m}$$

באופן דומה: $E^{cm'} = (p_1^{cm'})^2/m$

לפי הנתון, $E^{cm'} = E^{cm} - (1-\alpha)E_i$

$$\frac{(p_1^{cm'})^2}{m} = \frac{(p_1^{cm})^2}{m} - (1-\alpha)E_i$$

$$|\vec{V}_1^{cm'}| = \frac{1}{m}\sqrt{|\vec{p}_1^{cm}|^2 - m(1-\alpha)E_i} =$$

$$= \frac{1}{m}\sqrt{\left(m\sqrt{\frac{E_i}{2m}}\right)^2 - m(1-\alpha)E_i} =$$

$$= \frac{1}{m}\sqrt{\frac{E_i m}{2} - m(1-\alpha)E_i} = \sqrt{\frac{E_i}{2m} - \frac{(1-\alpha)E_i}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{E_i - 2E_i + 2\alpha E_i}{2m}} = \sqrt{\frac{E_i(2\alpha-1)}{2m}}$$

כיוון המהירות – לא ידוע. θ בזווית
הפיזור מותרות במערכת מרכז המסה.

ג. $$\vec{V}_1{}' = \vec{V}_1^{cm'} + \vec{V}_{cm} = \sqrt{\frac{E_i(2\alpha-1)}{2m}}\left(\cos\theta_{cm}\hat{x} + \sin\theta_{cm}\hat{y}\right) + \sqrt{\frac{E_i}{2m}}\,\hat{x} =$$

$$= \sqrt{\frac{E_i}{2m}}\left[(2\alpha-1)^{1/2}\cos\theta_{cm} + 1,\ (2\alpha-1)^{1/2}\sin\theta_{cm}\right]$$

$$\tan\theta = \frac{(2\alpha-1)^{1/2}\sin\theta_{cm}}{(2\alpha-1)^{1/2}\cos\theta_{cm} + 1} = \frac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + \left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)^{1/2}}$$

ישנה זווית θ מקסימלית, כפונק' של θ_{cm},
שעבורה גם $\tan\theta$ מקסימלי. (היות והוא פונק' מונוטונית).

נסמן:
$$f(\theta_{cm}) \equiv \tan\theta = \frac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + \left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{df(\theta_{cm})}{d\theta_{cm}} = \frac{\cos\theta_{cm}\left(\cos\theta_{cm}+\sqrt{\frac{1}{2\alpha-1}}\right)+\sin^2\theta_{cm}}{\left(\cos\theta_{cm}+\sqrt{\frac{1}{2\alpha-1}}\right)^2}$$

בנק' אקסטרמום: $\frac{df}{d\theta}=0$:

$$\cos^2\theta_{cm}+\cos\theta_{cm}\cdot\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)^{1/2}+\sin^2\theta_{cm}=0$$

$$\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)^{1/2}\cos\theta_{cm}+1=0$$

$$\cos\theta_{cm}=-(2\alpha-1)^{1/2}$$

$$\boxed{\alpha=0.625}\Rightarrow$$

$$\cos\theta_{cm}=-\frac{1}{2}$$

$$\theta_{cm}=120^\circ$$

$$\tan\theta_{max}=\frac{\sin(120^\circ)}{\cos(120^\circ)+\sqrt{\frac{1}{2\cdot0.625-1}}}=\frac{\sin120^\circ}{\cos120^\circ+2}=$$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt3}$$

$$\theta_{max}=30^\circ$$

במערכת הצופה הנייח

יתכן פיזור רק עד זווית של 30°.

③

תנע המערכת הוא (טיל + גז):

$$P_t = mv$$

$$P_{t+\Delta t} = (m-\Delta m)(v+\Delta v) - (U-v)\Delta m$$

$$\Delta P = F\Delta t$$

$$m(t)v(t) \simeq m(t)v(t) + m(t)\Delta v - U\Delta m - F\Delta t$$

$$\frac{F\Delta t}{\Delta t} = m(t)\frac{dv}{dt} - U\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

קצב הפלט:

מסת הגז הנפלט $\rightarrow \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = -\dfrac{dm}{dt} \leftarrow$ מסת הטיל

$$F = m(t)\frac{dv}{dt} + U\frac{dm}{dt}$$

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -U\frac{dm}{dt} + F$$

$$M_0 \exp(-t/\tau)\frac{dv}{dt} = +U\frac{M_0}{\tau}\exp(-t/\tau) - M_0\exp(-\tfrac{t}{\tau})g$$

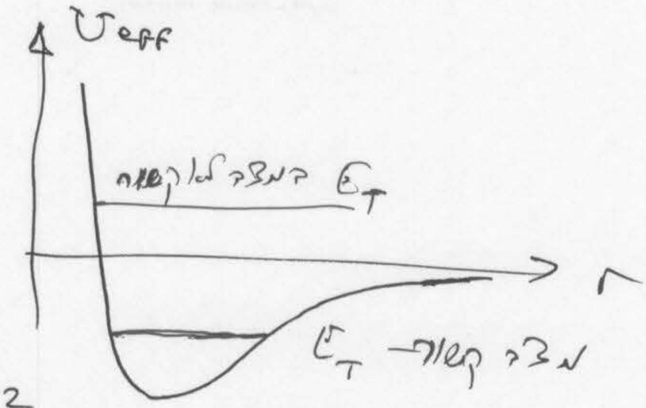
$$\frac{dv}{dt} = \frac{U}{\tau} - g$$

$$v = \left(\frac{U}{\tau} - g\right)t$$ א

$$v = \left(\frac{30}{0.2} - 10\right)\cdot 5 = 700\ m/s$$ ב

(4) א) התנע הזוויתי נשמר, כי פועל רק כח מרכזי.

ב)



$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_0\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{R}{r}\right] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{L^2}{2m} + E_0R^2\right]\frac{1}{r^2}}_{\text{יהיה דומיננטי ב-}r\text{ נמוכים}} - \underbrace{\frac{E_0R}{r}}_{\text{יהיה דומיננטי ב-}r\text{ גבוהים}}$$

יש תנועה מחזורית עבור $E<0$ ותנועה לאינסוף עבור $E>0$.

ג) במסלול מעגלי:

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$$

$$-2\left(\frac{L^2}{2m} + E_0R^2\right)\frac{1}{r^3} + \frac{E_0R}{r^2} = 0$$

$$\left(\frac{L^2}{m} + 2E_0R^2\right)\frac{1}{r} = E_0R$$

$$r_0 = \frac{L^2}{E_0Rm} + 2R \Leftarrow \text{רדיוס מסלול מעגלי}$$

$$E_T(r=r_0) = \left(\frac{L^2}{2m} + E_0R^2\right)\frac{1}{\left(\frac{L^2}{E_0Rm} + 2R\right)^2} - E_0R\left(\frac{L^2}{E_0Rm} + 2R\right)^{-1}$$

.3

$$E_T = \left(\frac{400}{2} + 2500\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{400}{500} + 10\right)^2}$$ [redacted]

[redacted] $$500\left(\frac{400}{500} + 10\right)^{-1} =$$

$$= \frac{2700}{116.6} - \frac{500}{10.8} = -23.14 \text{ J}$$