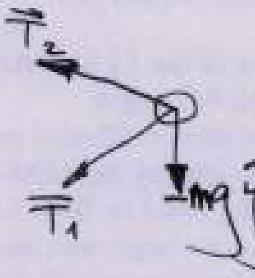
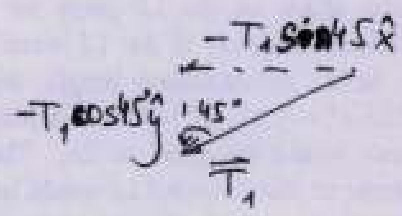
מבחן מועד א' תשע"ג מכניקה

פתרונות

1.א.



ב. נפרק את $\vec{T}_1$:



נפרק את $\vec{T}_2$:

$$\vec{T}_2 = -T_2\sin45°\hat{x} + T_2\cos45°\hat{y}$$

משוואת התנועה בכיוון $\hat{y}$:

$$m\ddot{y} = T_2\cos45° - T_1\cos45° - mg$$

אין תנועה בכיוון $\hat{y}$, ולכן:

$$(T_2 - T_1)\cos45 = mg$$

משוואת התנועה בכיוון $\hat{x}$:

$$m\ddot{x} = -(T_1 + T_2)\sin45°$$

אבל התאוצה בכיוון המוט (כלומר, בכיוון $-\hat{x}$) בתנועה מעגלית שווה-מהירות-זוויתית היא: $+\omega^2 r$, כאשר

$r = l\sin45°$ ← רדיוס המעגל.

$$\begin{cases} -m\omega^2 l\sin45° = -(T_1 + T_2)\sin45° \\ T_2 - T_1 = \dfrac{mg}{\cos45°} \end{cases}$$

$$T_1 + T_2 = + m\omega^2 l$$

$$\begin{cases} T_1 = -T_2 + m\omega^2 l \\ T_2 = T_1 + \dfrac{mg}{\cos 45^\circ} \end{cases}$$

$$T_1 = -T_1 - \frac{mg}{\cos 45^\circ} + m\omega^2 l$$

מתיחות בחוט התחתון $\rightarrow$ $T_1 = +\frac{m}{2}\left\{\omega^2 l - \frac{g}{\cos 45^\circ}\right]$

מתיחות בחוט העליון $\rightarrow$ $T_2 = T_1 + \frac{mg}{\cos 45^\circ} = \frac{m}{2}\left[\omega^2 l + \frac{g}{\cos 45^\circ}\right]$

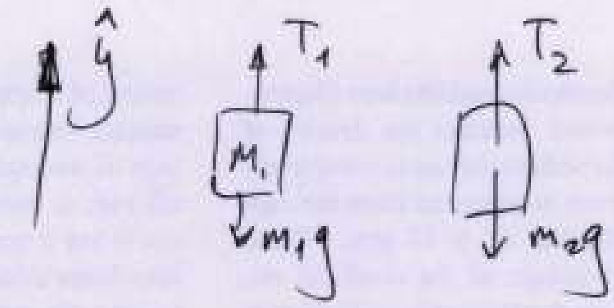
ג.

$$T_2 = \frac{1}{2}\left\{10^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9.8}{\sqrt{2}/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4} 10^2 + 6.93 \simeq \underline{32\ N}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[10^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9.8}{\sqrt{2}/2}\right] = 25 - 6.93 \simeq \underline{18 N}$$

2. א.



משוואות כוחות:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \end{cases}$$

בגלל, שאורך החוט קבוע, נקבל:

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1 \equiv a$$

נכניס סימון חדש: התאוצה a

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = -m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

אם הגלגלת חסרת מסה, נקבל:
(גלגלת חלקה, והחוט חסר מסה)

$$T_1 = T_2 \equiv T \,.$$

$$\begin{cases} T - m_1 g = -m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$$0 = m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a$$

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g \\ \ddot{y}_2 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \end{aligned}\right\}$$ תאוצות הגופים

ב. המים, ברגע יציאתם מהמיכל, נעים במהירות זהה לזו של המיכל. לכן, יציאתם לא משנה את התנע של המיכל. כמובן, מסת המיכל קטנה עם יציאת המים ממנו כלהלן:

המסה הרגעית של המיכל השמאלי; לאחר פתיחת החור התחתי.

$$\tilde{M}_1(t)=M_1-bt$$

לכן:

תאוצות הגופים.

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\dfrac{(m_1-bt)-m_2}{(m_1-bt)+m_2}\,g \\[2ex] \ddot{y}_2 = \dfrac{(m_1-bt)-m_2}{(m_1-bt)+m_2}\,g \end{cases}$$

ג. עתה לא נוכל להניח ש- T_1 שווה ל- T_2.

מסה רגעית של המיכל השמאלי.

$$\begin{cases} T_1-\tilde{m}_1 g=-\tilde{m}_1 a \\ T_2-m_2 g=m_2 a \end{cases}$$

שקול המומנט על הגלגלת:

$$|\bar{\tau}|=|(T_1-T_2)R|$$

$$\begin{cases} I\dot{\omega}=(T_1-T_2)R \\ R\omega=v \implies R\dot{\omega}=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} I\dfrac{a}{R^2}=T_1-T_2 \\ T_1-\tilde{m}_1 g=-\tilde{m}_1 a \\ T_2-m_2 g=m_2 a \end{cases}$$

$$I\frac{a}{R^2} = \tilde{m}_1 g - \tilde{m}_1 a - m_2 g - m_2 a$$

$$a\left[\tilde{m}_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right] = \tilde{m}_1 g - m_2 g$$

$$\boxed{\tilde{m}_1 = m_1 - bt}$$

$$a = \frac{(m_1 - bt) - m_2}{(m_1 - bt) + m_2 + \frac{I}{R^2}}\, g$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\frac{(m_1 - bt) - m_2}{(m_1 - bt) + m_2 + I/R^2}\, g \\ \ddot{y}_2 &= \frac{(m_1 - bt) - m_2}{(m_1 - bt) + m_2 + I/R^2}\, g \end{aligned}}$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{(2 - 0.05\cdot 10) - 1}{(2 - 0.05\cdot 10) + 1 + \frac{1}{2}\cdot 4}\cdot 10 = -\frac{\frac{10}{2}}{4.5} \overset{\cdot 3}{=} -\frac{10}{9} \simeq -1.1\, m/s^2$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{10}{9} \simeq 1.1\, \frac{m}{s^2}$$

3. א. נקבע את הסקלה של האנרגיה הפוטנציאלית ביחס לנקודת ההתחלה של מסלול הקוביה.

כלומר, האנרגיה בראש המסלול היא $U_p=0$

האנרגיה הפוטנציאלית בתחתית המסלול היא $U_p=-mgR$.

כוח נורמלי, המופעל על הקוביה ע"י המשטח המעגלי, מאונך למסלול ולא משנה את האנרגיה של הקוביה. לכן, האנרגיה הכוללת של הקוביה נשמרת:

$$E_T(\text{שיא הגובה}) = E_T(\theta)$$

כאשר θ מוגדרת דרך השאלה.

$$E_T(\theta)=U_p(\theta)+\frac{1}{2}mv^2(\theta) = -mgR\cos\theta+\frac{1}{2}mv^2(\theta)$$

אבל האנרגיה בשיא הגובה מוגדרת להיות אפס, לכן:

$$V^2(\theta)=2gR\cos\theta$$

מאידך, במסלול מעגלי: $V=\omega R$

יוצא אפוא:

$$\boxed{\omega^2(\theta)=\frac{2g\cos\theta}{R}}$$

נרשום את משוואות הכוחות הפועלים על הקוביה:

$$-N\hat{r}+mg\cos\theta\,\hat{r}=m\underbrace{(\ddot{\vec{r}}\cdot\hat{r})}_{\text{הרכיב ה-}\hat{r}\text{ של התאוצה}}\hat{r}$$

$$\ddot{\vec{r}}=\underbrace{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}}_{(\ddot{\vec{r}}\cdot\hat{r})\hat{r}}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

אבל $\ddot{r}=0$, לכן:

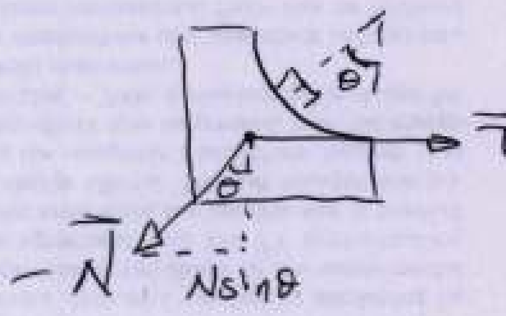
$$-N\hat{r}+mg\cos\theta\,\hat{r}=-mR\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$N - mg\cos\theta = mR\omega^2(\theta)$$

$$N = mg\cos\theta + mR\omega^2(\theta) =$$

$$= m\{g\cos\theta + 2g\cos\theta) = 3mg\cos\theta$$

עפ״ החוק השלישי של ניוטון, זהו גם הכוח הפועל על המשטח המעגלי, רק בכיוון הפוך:



אם המשטח לא זז בכיוון האופקי:

$$T = N\sin\theta = 3mg\cos\theta\sin\theta$$

ד.

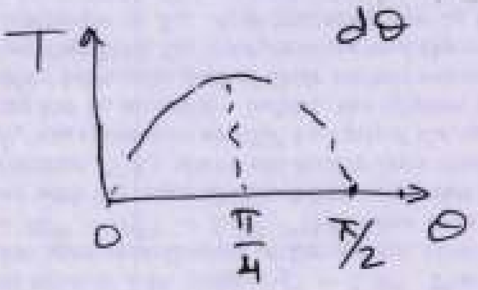
$$T = 3mg\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{3}{2}mg\sin 2\theta\right] =$$

$$= 3mg\cos 2\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



ג.

$$T_{max} = T\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}mg$$

$$T_{max} = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot 10 = 30N$$

.3

4. א.

$$U(r_a)-U(r_b)=\int_a^b \vec F\cdot d\vec r$$

$$U(r)-\underbrace{U(\infty)}_{=0}=\int_r^\infty \vec F\cdot d\vec r$$

כל כח מרכזי הוא כח משמר, לכן מסלול האינטגרציה - לא משנה.

$$U(r)=\int_r^\infty \frac{kq_1q_2}{r^2}dr=-\frac{kq_1q_2}{r}\Big|_r^\infty=$$

$$=\frac{kq_1q_2}{r}=-\frac{k|q_1q_2|}{r}$$

ב. שימור תנע:

$$\dot{\vec L}=\vec r\times\vec F$$

אבל $\vec r\times\vec F=0$, כי $\vec r\parallel\vec F$ (מקביל)

לכן $\dot{\vec L}=0$

$$\vec L=const$$

אם הכיוון של $\vec L$ קבוע, זה אומר שהכיוון של $\vec r\times\vec v$ קבוע אף הוא (שהרי: $\vec L=m\vec r\times\vec v$)

אם כן, $\vec L$ מאונך למישור התנועה שהוא המישור המוגדר ע"י $\vec r$ ו-$\vec v$. אם $\vec L$ קבוע בכיוונו - הפירוש של דבר ~~[illegible]~~ שכל המסלול נמצא באותו מישור.

ב.

$$\vec{L} = m_1 \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{L} = m_1 r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = m_1 r^2 \dot{\theta}\hat{z}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{|\vec{L}|}{m_1 r}$$

ג.

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}|^2 + U_p =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \cdot (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) + U_p =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}^2}_{= \frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2}} - \frac{k|q_1 q_2|}{r}$$

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 + \frac{|\vec{L}|^2}{2m_1 r^2} - \frac{k|q_1 q_2|}{r}$$

בנקודות המפנה של המסלול (כלומר, היכן שהמרחק אל M_2 הוא הגדול או הקטן ביותר):

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 = 0$$

$$E_T = \frac{|\vec{L}|^2}{2m_1 r^2} - \frac{k|q_1 q_2|}{r}$$

מאידך, האנרגיה הכוללת נשמרת, כמו עם כל כוח מרכזי, לכן:

$$E_T = E_0$$

$$\frac{|\vec{L}|^2}{2m_1 r^2} - \frac{k|q_1 q_2|}{r} = E_0$$

$$2m_1 E_0 r^2 + 2m_1 k|q_1 q_2| r - |\vec{L}|^2 = 0$$

$L_0 = |\vec{L}|$ ← התנע הזוויתי נשמר!

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4m_1^2k^2q_1^2q_2^2 + 8m_1E_0L_0^2} - 2m_1k|q_1q_2|}{4m_1E_0}$$

$E_0 < 0$, לכן:

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4m_1^2k^2q_1^2q_2^2 - 8m_1|E_0|L_0^2} + 2m_1k|q_1q_2|}{4m_1|E_0|}$$

ביטוי זה נותן את המרחק הקרוב והרחוק
ביותר של m_1 מ-M_2.

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4\cdot10^{-10}\cdot81\cdot10^{18}\cdot10^{-12} - 8\cdot10^{-5}\cdot1\cdot25} + 2\cdot10^{-5}\cdot9\cdot10^{9}\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-5}\cdot1} = ה$$

$$= \frac{\pm\sqrt{0.0324 - 0.002} + 0.18}{4\cdot10^{-5}} = \frac{\pm0.174 + 0.18}{4\cdot10^{-5}} =$$

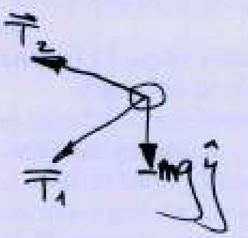
$$= \begin{cases} 8850\,m \\ \approx 150\,m \end{cases}$$

(יוצא גם 142m
לוקחים ספרות נוספות
במעבר השורש בשלב 1.)

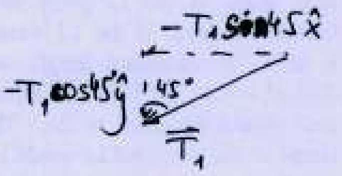
מבחן מועד א' תשע"ג מכניקה

פתרונות

1.א.



ב. נפרק את $\vec{T}_1$:



נפרק את $\vec{T}_2$:

$$\vec{T}_2 = -T_2\sin 45°\hat{x} + T_2\cos 45°\hat{y}$$

משוואת התנועה בכיוון $\hat{y}$:

$$m\ddot{y} = T_2\cos 45° - T_1\cos 45° - mg$$

אין תנועה בכיוון $\hat{y}$, ולכן:

$$(T_2 - T_1)\cos 45 = mg$$

משוואת התנועה בכיוון $\hat{x}$:

$$m\ddot{x} = -(T_1 + T_2)\sin 45°$$

אבל התאוצה בכיוון המוט (כלומר, בכיוון $-\hat{x}$) בתנועה מעגלית שוות-מהירות-זוויתית היא: $+\omega^2 r$, כאשר

$r = l\sin 45°$ ← רדיוס המעגל.

$$\begin{cases} -m\omega^2 l\sin 45° = -(T_1 + T_2)\sin 45° \\ T_2 - T_1 = \dfrac{mg}{\cos 45°} \end{cases}$$

$$T_1 + T_2 = + m\omega^2 l$$

$$\begin{cases} T_1 = -T_2 + m\omega^2 l \\ T_2 = T_1 + \dfrac{mg}{\cos 45^\circ} \end{cases}$$

$$T_1 = -T_1 - \frac{mg}{\cos 45^\circ} + m\omega^2 l$$

מתיחות בחוט התחתון $\rightarrow$ $T_1 = +\frac{m}{2}\left\{\omega^2 l - \frac{g}{\cos 45^\circ}\right]$

מתיחות בחוט העליון $\rightarrow$ $T_2 = T_1 + \frac{mg}{\cos 45^\circ} = \frac{m}{2}\left[\omega^2 l + \frac{g}{\cos 45^\circ}\right]$

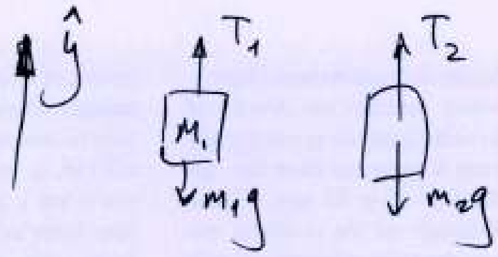
.ג

$$T_2 = \frac{1}{2}\left\{10^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9.8}{\sqrt{2}/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}10^2 + 6.93 \simeq \underline{32\ N}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[10^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9.8}{\sqrt{2}/2}\right] = 25 - 6.93 \simeq \underline{18N}$$

2. א.



משוואות כוחות:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \end{cases}$$

בהנחה, שאורך החוט קבוע, נניח:

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1 \equiv a$$

נכניס סימון את המשוואה a

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = -m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

אם הגלגלת חסרת מסה, נקבל:
(גלגלת חלקה, והחוט חסר מסה)

$$T_1 = T_2 \equiv T$$

$$\begin{cases} T - m_1 g = -m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$0 = m_1 g - m_1 a$ [redacted] $m_2 g$ [redacted] $m_2 a$

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g \\ \ddot{y}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

תאוצות הגופים

ד. המים, בדרך יציאתם מהמיכל, נעים במהירות זהה לזו של המיכל. לכן, יציאתם לא משנה את התנע של המיכל. כמובן, מסת המיכל קטנה עם יציאת המים ממנו החוצה:

המסה הרגעית של המיכל השתנה; לאחר פתיחת החור בתחתית.

$$\tilde{M}_1(t) = M_1 - bt$$

לכן:

תאוצות הגופים.

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\dfrac{(M_1 - bt) - M_2}{(M_1 - bt) + M_2} g \\ \ddot{y}_2 = \dfrac{(M_1 - bt) - M_2}{(M_1 - bt) + M_2} g \end{cases}$$

ה. עתה לא נוכל להניח ש- T_1 שווה ל- T_2.

מסה רגעית של המיכל בשעה.

$$\begin{cases} T_1 - \tilde{M}_1 g = -\tilde{M}_1 a \\ T_2 - M_2 g = M_2 a \end{cases}$$

שקול המומנט על הגלגלת:

$$|\bar{\tau}| = |(T_1 - T_2)R|$$

$$\begin{cases} I\dot{\omega} = (T_1 - T_2)R \\ R\omega = V \implies R\dot{\omega} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} I\dfrac{a}{R^2} = T_1 - T_2 \\ T_1 - \tilde{M}_1 g = -\tilde{M}_1 a \\ T_2 - M_2 g = M_2 a \end{cases}$$

$$I\frac{a}{R^2} = \tilde{m}_1 g - \tilde{m}_1 a - m_2 g - m_2 a$$

$$a\left[\tilde{m}_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right] = \tilde{m}_1 g - m_2 g$$

$$\boxed{\tilde{m}_1 = m_1 - bt}$$

$$a = \frac{(m_1 - bt) - m_2}{(m_1 - bt) + m_2 + \frac{I}{R^2}}\, g$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\frac{(m_1 - bt) - m_2}{(m_1 - bt) + m_2 + I/R^2}\, g \\ \ddot{y}_2 &= \frac{(m_1 - bt) - m_2}{(m_1 - bt) + m_2 + I/R^2}\cdot g \end{aligned}}$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{(2 - 0.05\cdot 10) - 1}{(2 - 0.05\cdot 10) + 1 + \frac{1}{2}\cdot 4}\cdot 10 = -\frac{\frac{10}{2}}{4.5} \overset{\cdot 3}{=} -\frac{10}{9} \approx -1.1\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{10}{9} \approx 1.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

3. א. נקבע את הסקלה של האנרגיה הפוטנציאלית באפס לנקודת ההתחלה של מסלול הקוביה.

כלומר, האנרגיה בראש המסלול היא $U_p = 0$

האנרגיה $\underbrace{\text{בתחתית}}_{\text{הפוטנציאלית}}$ המסלול היא $U_p = -mgR$.

כוח נורמלי, המופעל על הקוביה ע"י המשטח המעגלי, מאונך למסלול ולכן לא משנה את האנרגיה של הקוביה. לכן, האנרגיה הכוללת של הקוביה נשמרת:

$$E_T(\text{שיא הגובה}) = E_T(\theta)$$

כאשר θ מוגדרת דרך השאלה.

$$E_T(\theta) = U_p(\theta) + \frac{1}{2}mv^2(\theta) =$$

$$= -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2(\theta)$$

$\Leftarrow$ אבל האנרגיה בשיא הגובה מוגדרת להיות אפס, לכן:

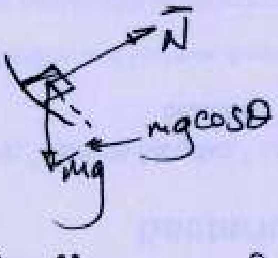
$$V^2(\theta) = 2gR\cos\theta$$

מאידך, במסלול מעגלי: $V = \omega R$

יוצא אפוא:

$$\boxed{\omega^2(\theta) = \frac{2g\cos\theta}{R}}$$

נרשום את משוואות הכוחות הפועלים על הקוביה:



$$-N\hat{r} + mg\cos\theta\,\hat{r} = m\underbrace{(\ddot{\vec{r}}\cdot\hat{r})}_{\text{הרכיב ה-}\hat{r}\text{ של התאוצה}}\hat{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r}}_{(\ddot{\vec{r}}\cdot\hat{r})\hat{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

אצלנו $\ddot{r} = 0$, לכן:

$$-N\hat{r} + mg\cos\theta\,\hat{r} = -mR\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$N - mg\cos\theta = mR\omega^2(\theta)$$

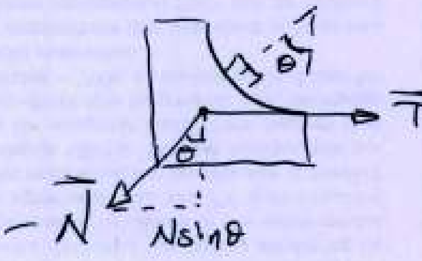
$$N = mg\cos\theta + mR\omega^2(\theta) =$$

$$= m\{g\cos\theta + 2g\cos\theta) = 3mg\cos\theta$$

עפ״י החוק השלישי של ניוטון, זהו גם

הכוח הפועל על המסילה המעגלי. רק

בכיוון הפוך:



אם המסילה לא זז בכיוון האופקי:

$$T = N\sin\theta = 3mg\cos\theta\sin\theta$$

ב.

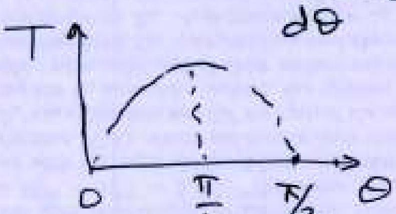
$$T = 3mg\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{3}{2}mg\sin 2\theta\right] =$$

$$= 3mg\cos 2\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \implies 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



ג.

$$T_{max} = T\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}mg$$

3.

$$T_{max} = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot 10 = 30N$$

4. ג.

$$U(r_a) - U(r_b) = \int_a^b \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$U(r) - \underbrace{U(\infty)}_{=0} = \int_r^\infty \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

כל כח מרכזי הוא כח משמר, לכן מסלול האינטגרציה - לא משנה.

$$U(r) = \int_r^\infty \frac{kq_1q_2}{r^2}\,dr = -\frac{kq_1q_2}{r}\Big|_r^\infty =$$

$$= \frac{kq_1q_2}{r} = -\frac{k|q_1q_2|}{r}$$

ה. שימור תנע: $\dot{\bar{L}} = \bar{r}\times\bar{F}$

אבל $\bar{r}\times\bar{F} = 0$, כי $\bar{r}\parallel\bar{F}$ (מקביל)

לכן: $\dot{\bar{L}} = 0$

$\bar{L} = const$

אם הכיוון של $\bar{L}$ קבוע, זה אומר שהכיוון של $\bar{r}\times\bar{v}$ קבוע אף הוא (שהרי: $\bar{L} = m\bar{r}\times\bar{v}$)

אם כן, $\bar{L}$ מאונך למישור התנועה שהוא המישור המוגדר ע"י $\bar{r}$ ו-$\bar{v}$. אם $\bar{L}$ קבוע בכיוונו - הפירוש של דבר שכל המסלול נמצא באותו מישור.

ג.
$$\vec{L} = m_1\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{L} = m_1 r\hat{r}\times(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = m_1 r^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{|\vec{L}|}{m_1 r}$$

ד.
$$E_T = \frac{1}{2}m_1(|\vec{v}|)^2 + U_p =$$

$$= \frac{1}{2}m_1(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})\cdot(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) + U_p =$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2}_{=\frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2}} - \frac{k|q_1q_2|}{r}$$

$$E_T = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 + \frac{|\vec{L}|^2}{2m_1r^2} - \frac{k|q_1q_2|}{r}$$

בנקודות המפנה של המסלול (כלומר, היכן
שהמרחק אל M_2 הוא הגדול או הקטן ביותר):

$$\frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 = 0$$

$$E_T = \frac{|\vec{L}|^2}{2m_1r^2} - \frac{k|q_1q_2|}{r}$$

מלבד, האנרגיה הכוללת נשמרת, כמו עם
כל כוח מרכזי, לכן:

$$E_T = E_0$$

$$\frac{|\vec{L}|^2}{2m_1r^2} - \frac{k|q_1q_2|}{r} = E_0$$

$$2m_1E_0r^2 + 2m_1k|q_1q_2|r - |\vec{L}|^2 = 0$$

התנע הזוויתי נשמר! $\} \longrightarrow L_0 = |\vec{L}|$

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4m_1^2k^2q_1^2q_2^2 + 8m_1E_0L_0^2} - 2m_1k|q_1q_2|}{4m_1E_0}$$

$E_0<0$, לכן:

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4m_1^2k^2q_1^2q_2^2 - 8m_1|E_0|L_0^2} + 2m_1k|q_1q_2|}{4m_1|E_0|}$$

ביטוי זה נותן את המרחק הקרוב והרחוק ביותר של m_1 מ-M_2.

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4\cdot10^{-10}\cdot81\cdot10^{18}\cdot10^{-12} - 8\cdot10^{-5}\cdot1\cdot25} + 2\cdot10^{-5}\cdot9\cdot10^{9}\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-5}\cdot1} = ה$$

$$= \frac{\pm\sqrt{0.0324 - 0.002} + 0.18}{4\cdot10^{-5}} = \frac{\pm0.174 + 0.18}{4\cdot10^{-5}} =$$

$$= \begin{cases} 8850\,m \\ \approx 150\,m \end{cases}$$

(יוצא 142m אך לוקחים ספרות נוספות במרחק השורש בצד 1.)