משך המבחן: 3 שעות **ללא הפסקה**	מבוא לפיסיקה מודרנית	86-170-01
כל חומר פתוח	18.7.2006	מועד א' תשס"ו

1. π^+-מזון יוצא בזמן $t=0$ מנקודת $x=0$ בכיוון ימינה במהירות $v_1=0.9c$. זמן החיים של π^+-מזון שווה $\tau=2.5\cdot10^{-8}\,\text{sec}$ (לפי שעון "הפנימי"). בזמן $t=t_0$ מאותה נקודה לאותו כיוון יוצא π^--מזון במהירות $v_2=0.98c$. זמן החיים של π^--מזון גם שווה τ.

האם π^--מזון יספיק להשיג את π^+-מזון?

אם כן, באיזה רגע זמן t ובאיזה נקודה x זה יקרה, אם

א) $t_0=3\cdot10^{-9}\,\text{sec}$?

ב) $t_0=1\cdot10^{-8}\,\text{sec}$?

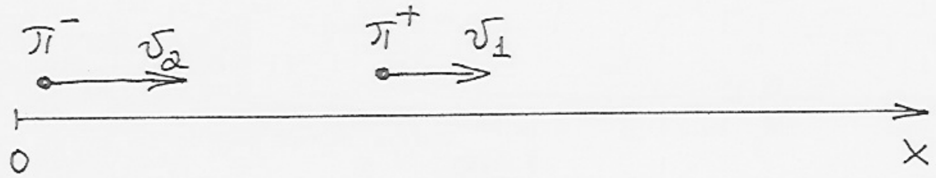
בשאלות **א'** ו **ב'** יש להניח כי המזונים חיים במשך זמן τ (כל אחד לפי השעון שלו) ואחר-כך מתפרקים.

אחרי שפתרתם את **א'** ו **ב'** בהנחה הזאת, נזכיר שהמשמעות המדויקת של "זמן החיים" היא שהסתברות של כל מזון להישאר בחיים שווה ל- $w_i=e^{-t_i/\tau}$ כאשר i מסמן $+$ או $-$ ו t_i זה זמן "הפנימי" של החלקיק.

עם ההגדרה הזאת (המדויקת) של זמן החיים מצאו את ההסתברות ש π^--מזון יספיק להשיג את π^+-מזון אם

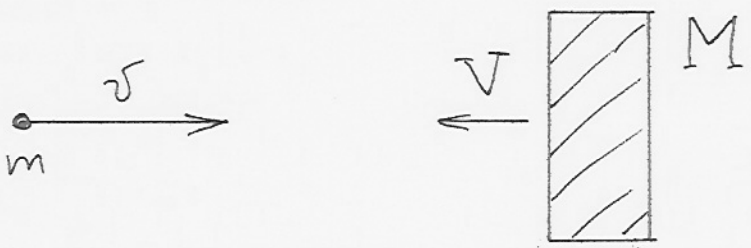
ג) $t_0=3\cdot10^{-9}\,\text{sec}$.

ד) $t_0=1\cdot10^{-8}\,\text{sec}$.



2. כדור אלסטי בעל מסה m נע בכיוון ימינה לפי ציר x במהירות $v=0.6c$. בכיוון שמאלה נע קיר כבד עם מסה $M\gg m$ במהירות $V=0.3c$. אחרי התנגשות אלסטית עם הקיר הכדור חוזר שמאלה במהירות u. מצאו את u.

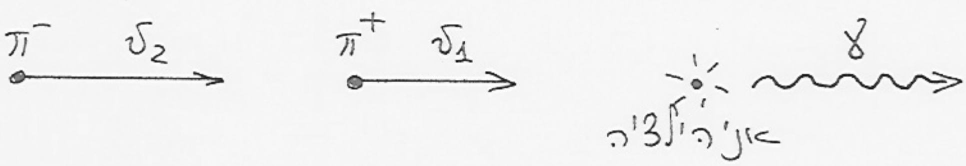
רמז: אם הקיר היה במנוחה ($V=0$) אז היינו מקבלים $u=-v$.



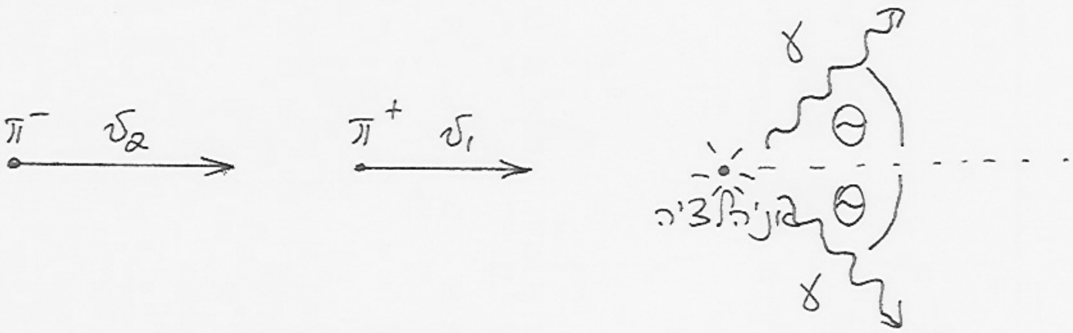
3. π^+-מזון נע בכיוון ימינה לפי ציר x במהירות $v_1 = 0.9c$. π^--מזון שנע באותו כיוון במהירות $v_2 = 0.98c$ משיג את π^+-מזון ומתרחשת אניהילציה (annihilation) של שני המזונים עם פליטת פוטונים (γ-קוונטים).

מסה (מסת המנוחה) של כל מזון היא $m = 140 m_e$, כאשר m_e היא מסה של אלקטרון.

א) האם מותר התהליך: $\pi^+ + \pi^- \to \gamma$ כאשר כתוצאה מאניהילציה של שני המזונים מופיע פוטון (γ-קוונט) אחד, ראה ציור. אם כן, מצאו את אורך הגל λ של הפוטון. אם לא, תסבירו (קצר וברור).



ב) האם מותר התהליך: $\pi^+ + \pi^- \to 2\gamma$ כאשר כתוצאה מאניהילציה של שני המזונים מופיעים שני פוטונים (γ-קוונטים) בעלי אותו אורך הגל λ, ראה ציור. אם כן, מצאו את λ ואת הזווית θ. אם לא, תסבירו (קצר וברור).



4. האלקטרונים שיוצאים משפת מתכת מסוימת המוקרנת באור עם אורך הגל $\lambda = 0.3\,\mu m$, נעים במעגלים בעלי רדיוס $R = 20\,\text{cm}$ תחת שדה מגנטי $H = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Tesla}$.

א) מצאו את פונקציית העבודה A של המתכת.

ב) האם אפשר להסתדר ללא תורת היחסות הפרטית בשאלה א', ז"א להשתמש בנוסחת אינשטיין בצורה הקלאסית $hf = A + \frac{m_e v^2}{2}$. תסבירו.

בהצלחה!

Introduction to modern physics

Exam 18/7/2006 Solutions

1a

π^--meson should reach the π^+-meson at time t where $v_1 t = v_2(t - t_0)$

$$t = \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1} = \frac{0.98c\, t_0}{(0.98-0.9)c} = \frac{0.98 \cdot 3 \cdot 10^{-9}}{0.08} = 3.675 \cdot 10^{-8}\,\text{sec}$$

The question is if at this time both mesons will be alive. In the laboratory frame of reference (related to axis x), the first meson lives $\tau / \sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{2.5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-0.9^2}} = 5.73 \cdot 10^{-8}\,\text{sec}$

Thus the first meson (π^+) will be alive. The π^--meson is more "young" and moves faster, so it will be alive also. The answer is: the second (π^-) meson will reach the first (π^+) one.

1b In this case we get for the time when π^--meson should reach the first one:

$$t = \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1} = \frac{0.98 \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{0.08} = 1.225 \cdot 10^{-7}\,\text{sec}$$

The first (π^+) meson that lives $5.73 \cdot 10^{-8}$ sec in the laboratory frame of reference will decay earlier. So in this case the second (π^-) boson will not reach the first (π^+) one.

1c) As we found in 1a, the two bosons should meet at $t = 3.675 \cdot 10^{-8}$ sec in the laboratory frame of reference.
The intrinsic time of π^+-meson will be
$t_1 = t \cdot \sqrt{1 - v_1^2/c^2} = t \cdot \sqrt{1 - 0.9^2} = 1.6 \cdot 10^{-8}$ se

The probability that the π^+ meson is alive at the time of meeting is
$w_1 = e^{-t_1/\tau} = e^{-\frac{1.6}{2.5}} \approx 0.53$

The time that lasted for the π^- meson in the laboratory frame (between it appeared at t_0 and reached the π^+ meson at t) is $t - t_0 \approx 3.375 \cdot 10^{-8}$ sec. Its intrinsic time is $t_2 = (t - t_0)\sqrt{1 - v_2^2/c^2} = (t - t_0) \cdot \sqrt{1 - (0.98)^2} =$
$\approx 0.67 \cdot 10^{-8}$ sec. The probability that π^- meson is alive at the time of meeting is $w_2 = e^{-t_2/\tau} = e^{-\frac{0.67}{2.5}} = 0.76$

The probability that both mesons will be alive at the time of meeting (annihilation) is $w = w_1 \cdot w_2 = 0.53 \cdot 0.76 \approx 0.4$
i.e. $\approx 40\%$

(1d) This question is absolutely analogous to the previous one 1c, with the only difference that the time of proposed meeting (annihilation) is $t = 1.225 \cdot 10^{-7}$ sec (see 1b). The intrinsic time of the π^+-meson is $t_1 = t\sqrt{1 - v_1^2/c^2} = t\sqrt{1 - 0.9^2} \approx 5.3 \cdot 10^{-8}$ sec, and the probability to be alive is

$$w_1 = e^{-\frac{t_1}{\tau}} = e^{-\frac{5.3}{2.5}} = 0.12$$

The intrinsic time of the π^--meson is

$$t_2 = (t - t_0)\sqrt{1 - v_2^2/c^2} = 1.125 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{1 - 0.98^2} =$$

$$= 2.2 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

$$w_2 = e^{-\frac{t_2}{\tau}} = e^{-\frac{2.2}{2.5}} = 0.41$$

The probability of meeting (annihilation) is $w = w_1 \cdot w_2 = 0.12 \cdot 0.41 = 0.05$, i.e., $\approx 5\%$

(2) Consider this collision in the frame of reference S' related to the massive wall. In this frame the wall is at rest both before and after ~~of~~ the collision. The velocity of the ball in frame S' before the collision is:

$$v' = \frac{v + V}{1 + \frac{vV}{c^2}}$$

After the collision the velocity of the ball will be, obviously:

$$-v' = -\frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}}$$

Going back to the laboratory frame of reference, we get the velocity of the ball (in the laboratory frame).

$$u = -\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}} = -\frac{\frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}}+V}{1+\frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}}\frac{V}{c^2}} =$$

$$= -\frac{v+V+V\left(1+\frac{vV}{c^2}\right)}{1+\frac{vV}{c^2}+(v+V)\frac{V}{c^2}} = -\frac{v+2V+v\frac{V^2}{c^2}}{1+2\frac{Vv}{c^2}+\frac{V^2}{c^2}}$$

In the limit of non-relativistic motion when both v and V are much less than c we have: $u = -(v+2V)$, i.e., the well known result of classical mechanics.

Substituting the data ($v = 0.6c$, $V = 0.3c$) we get

$$u = -\frac{0.6+0.6+0.6\cdot 0.3^2}{1+2\cdot 0.6\cdot 0.3+0.3^2}\,c = -0.86c$$

So the ball will move with the velocity $u = -0.86c$ after the collision.

3 a) Without solving this problem, it is obvious that one variable (the wavelength of the photon) is not ~~enough~~, enough to satisfy ~~the~~ two conservation laws: energy and momentum.

Therefore the process described in 3a is forbidden.

(3b)

Conservation of energy:

$$E^+ + E^- = 2hf, \qquad (1)$$

where E^+ and E^- are the energies of π^+ and π^- mesons, respectively, and hf is the energy of each photon.

$$E^+ = \sqrt{m^2c^4 + p_+^2c^2}, \quad E^- = \sqrt{m^2c^4 + p_-^2c^2}$$

Conservation of momentum:

$$p_+ + p_- = 2\frac{hf}{c}\cos\Theta \qquad (2)$$

Here $p_+ = \dfrac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$ $\quad p_- = \dfrac{mv_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}$

From equations (1) and (2) we easily find f and Θ:

$$f = \frac{E^+ + E^-}{2h} \quad \left(\text{and } \lambda = \frac{c}{f}\right)$$

$$\cos\Theta = c\,\frac{p_+ + p_-}{2hf} = c\,\cancel{\frac{E^+ + E^-}{p_+ + p_-}}\,\frac{p_+ + p_-}{E^+ + E^-}$$

Substituting values, we get

$$f = 6.3 \cdot 10^{22}\ Hz, \text{ thus } \lambda = \frac{c}{f} = 4.8 \cdot 10^{-15}\ m$$

$$\cos\Theta \simeq 0.95 \Rightarrow \Theta \approx 17^\circ$$

$\boxed{5}$

4a

According to the Einstein's formula of photoeffect:

$$hf = A + \frac{mv^2}{2}$$

An electron with velocity v moves in magnetic field H ~~according to~~ along the circle which radius is determined by the Lorenz force:

$$m\frac{v^2}{R} = ma = qBv,$$

so $R = \frac{mv}{qB}$

Thus we get $v = \frac{qBR}{m} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 0.2}{9 \cdot 10^{-31}} =$

$\approx 7 \cdot 10^{5}$ m/sec

$$A = hf - \frac{mv^2}{2} = 6.6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{0.3 \cdot 10^{-6}} - \frac{9 \cdot 10^{-31}(7 \cdot 10^{5})^2}{2} =$$

$$= 4.4 \cdot 10^{-19}\ J = 2.7\ eV$$

4b Yes, we can use the non-relativistic Einstein's formula since $v \approx 7 \cdot 10^{-5}$ m/s is much less than c.